שאלה 1 (25%)

א) (15%) נסחו והוכיחו את משפט ניוטון על החוסם העליון לשורשים חיוביים של משוואה אלגברית

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n=0$$

פתרון

משפט. אם עבור $x=a>0$ מתקיים

$$f(a)>0,\ f'(a)>0,...,\ f^{(n)}(a)>0$$

אזי למשוואה אין שורשים גדולים מ- a.

הוכחה. בגלל ש- $f(x)$ - פולינום מסדר n, $f^{(k)}(x)\equiv 0$ עבור $k>n$.

אז, לפי נוסחת טיילור,

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ניקח $x>a$, כלומר $x-a>0$.

אז, לפי התנאים, $f(x)>0$: זאת אומרת שלמשוואה אין שורשים גדולים מ- a.

ב) (10%) בשימוש משפט ניוטון מצאו את הקטע שבו נמצאים שורשים שליליים של המשוואה

$$x^3+2x^2-x-2=0$$

פתרון

כדי למצאו את החסם התחתון של שורשים שליליים, נעסה החלפת משתנה $x=-z$:

$$h(z)=(-z)^3+2(-z)^2-(-z)-2=-z^3+2z^2+z-2$$

המשוואה הופכת ל- $h(z)=0$, או $H(z)=-h(z)=z^3-2z^2-z+2=0$.

אם $H(z)=0$ עבור $z>0$, אז, $f(-z)=0$. זאת אומרת שאם $a>0$ חסם העליון של שורשים חיוביים של המשוואה $H(z)=0$, אז, $A=-a<0$ חסם התחתון של שורשים שליליים של משוואה $f(x)=0$.

את החסם העליון נמצא לפי משפט ניוטון:

$$H(z)=z^3-2z^2-z+2$$
$$H'(z)=3z^2-4z-1$$
$$H''(z)=6z-4$$
$$H'''(z)=6>0$$

ניקח $a=3$:

$$H(3)=27-2\cdot 9-3+2=8>0,\ H'(3)=3\cdot 9-4\cdot 3-1=14>0,\ H''(3)=6\cdot 3-4=12>0$$

אז, לפי משפט ניוטון, $a=3$ - חסם העליון של שורשים חיוביים של משוואה $H(z)=0$, כלומר,

$A=-3$ - חסם התחתון של שורשים שליליים של משוואה $f(x)=0$.

כדי למצאו את החסם העליון של שורשים שליליים, נעסה החלפת משתנה $z=\dfrac{1}{w}$.

המשוואה $H(z)=0$ הופכת למשוואה

$\frac{1}{w^3}-\frac{2}{w^2}-\frac{1}{w}+2=0$, או במכפלה ב- w^3 : $G(w)=2w^3-w^2-2w+1=0$.

אם $w=b>0$ חסם העליון של שורשים חיוביים של משוואה $G(w)=0$, אז, $\frac{1}{b}$ - חסם התחתון של שורשים חיוביים של משוואה $H(z)=0$, ובהתאם, $B=-\frac{1}{b}<0$ - חסם העליון של שורשים שליליים של משוואה $f(x)=0$.

$$G(w)=2w^3-w^2-2w+1$$
$$G'(w)=6w^2-2w-2$$
$$G''(w)=12w-2$$
$$G'''(w)=12>0$$

ניקח $b=2$:

$G(2)=2\cdot 8-4-2\cdot 4+1=5>0$, $G'(2)=6\cdot 4-2\cdot 2-2=18>0$, $G''(2)=12\cdot 2-2=22>0$

אז, $B=-\frac{1}{2}$ - חסם העליון של שורשים שליליים של משוואה $f(x)=0$.

תשובה: כל השורשים השליליים של המשוואה $f(x)=0$ נמצאים על הקטע $[-3,-0.5]$.

בדיקה: $x^3+2x^2-x-2=x(x^2-1)+2(x^2-1)=(x+2)(x-1)(x+1)$

אז, השורשים הם $x_1=-2, x_2=-1, x_3=1$ ומתקיים $x_1,x_2\in[-3,-0.5]$

<u>**שאלה 2** (25%)</u>

א) (15%) תארו את שיטת שורש ריבועי לפתרון מערכת משוואות ליניאריות בצורה כללית ופיתחו את הנוסחאות עבור $n=3$.

<u>פתרון</u>

נתונה מערכת משוואות ליניאריות

$$Ax=b$$

כאשר A - מטריצה סימטרית ומוגדרת חיובית.
נמצא את המטריצה משולשת תחתונה

$$L=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \alpha_{n-1,3} & \cdots & \alpha_{n-1,n-1} & 0 \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{n,n-1} & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

כך שמתקיים $A=LL^T$, כלומר המערכת הופכת ל- $LL^Tx=b$.

פותרים אותה בני שלבים.

קודם כל, פותרים את המערכת $Ly=b$ מלמעלה למטה:

$$y_1=\frac{b_1}{\alpha_{11}}\ ,\ y_2=\frac{b_2-\alpha_{21}y_1}{\alpha_{22}},\dots,y_n=\frac{b_n-\alpha_{n1}y_1-\dots-\alpha_{n,n-1}y_{n-1}}{\alpha_{nn}}.$$

אחר כך פותרים את המערכת $L^Tx=y$ מלמטה למעלה:

$$x_n=\frac{y_n}{\alpha_{nn}},\ x_{n-1}=\frac{y_{n-1}-\alpha_{n,n-1}x_n}{\alpha_{n-1,n-1}},\dots,x_1=\frac{y_1-\alpha_{n1}x_n-\dots-\alpha_{21}x_2}{\alpha_{11}}.$$

עבור $n=3$:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix},\ L=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&0&0\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&0\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{bmatrix},\ L^T=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{21}&\alpha_{31}\\0&\alpha_{22}&\alpha_{32}\\0&0&\alpha_{33}\end{bmatrix}$$

$$LL^T=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&0&0\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&0\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{21}&\alpha_{31}\\0&\alpha_{22}&\alpha_{32}\\0&0&\alpha_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}^2&\alpha_{11}\alpha_{21}&\alpha_{11}\alpha_{31}\\\alpha_{21}\alpha_{11}&\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2&\alpha_{21}\alpha_{31}+\alpha_{22}\alpha_{32}\\\alpha_{31}\alpha_{11}&\alpha_{31}\alpha_{21}+\alpha_{32}\alpha_{22}&\alpha_{31}^2+\alpha_{32}^2+\alpha_{33}^2\end{bmatrix}$$

מתקבלות 6 משוואות:

$$\begin{cases}\alpha_{11}^2=a_{11},\\\alpha_{11}\alpha_{21}=a_{12},\\\alpha_{11}\alpha_{31}=a_{13},\\\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2=a_{22},\\\alpha_{21}\alpha_{31}+\alpha_{22}\alpha_{32}=a_{23},\\\alpha_{31}^2+\alpha_{32}^2+\alpha_{33}^2=a_{33}\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה: $\alpha_{11}=\sqrt{a_{11}}$,

מהמשוואה השנייה: $\alpha_{21}=\dfrac{a_{12}}{\alpha_{11}}$,

מהמשוואה השלישית: $\alpha_{31}=\dfrac{a_{13}}{\alpha_{11}}$,

מהמשוואה הרביעית: $\alpha_{22}=\sqrt{a_{22}-\alpha_{21}^2}$,

מהמשוואה החמישית: $\alpha_{32}=\dfrac{a_{23}-\alpha_{21}\alpha_{31}}{\alpha_{22}}$,

מהמשוואה השישית: $\alpha_{33}=\sqrt{a_{33}-\alpha_{31}^2-\alpha_{32}^2}$

בגלל שמטריצה A מוגדרת חיובית, לפי משפט סילבסטר, המינורים הראשיים של מטריצה A הם חיוביים: $\Delta_1=a_{11}>0$, $\Delta_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, $\Delta_3=\det A>0$.

אז, $\alpha_{11}=\sqrt{a_{11}}>0$, $\alpha_{22}=\sqrt{a_{22}-\dfrac{a_{12}^2}{a_{11}}}=\sqrt{\dfrac{a_{22}a_{11}-a_{12}^2}{a_{11}}}>0$, ובאותו סגנון ניתן להראות שגם $\alpha_{33}>0$

ב) (10%) בשימוש שיטת שורש ריבועי פתרו את המערכת

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+5y+5z=11 \\ x+5y+14z=20 \end{cases}$$

<u>פתרון</u>

בתרגיל הזה:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 14 \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 20 \end{bmatrix}$$

אז, $\alpha_{11}=\sqrt{1}=1$, $\alpha_{21}=\frac{1}{1}=1$, $\alpha_{31}=\frac{1}{1}=1$, $\alpha_{22}=\sqrt{5-1^2}=2$,

$\alpha_{32}=\frac{5-1\cdot 1}{2}=2$, $\alpha_{33}=\sqrt{14-1^2-2^2}=3$, כלומר,

$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $L^T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$,

ו-: $y_1=3$, $y_2=\frac{11-3}{2}=4$, $y_3=\frac{20-3-2\cdot 4}{3}=3$.

$x_3=\frac{3}{3}=1$, $x_2=\frac{4-2\cdot 1}{2}=1$, $x_1=3-1-1=1$.

תשובה: $x=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

<u>**שאלה 3** (25%)</u>

א) (13%) נסחו את שיטת רונגה-קוטא בצורה כללית ופיתחו את הנוסחה הפרמטרית לשיטה מסדר שני RK2.

<u>פתרון</u>

שיטת רונגה-קוטא מיועדת לפתרון נומרי של בעיית קושי

$$y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0$$

בצורה כללית:

$$y_{m+1}=y_m+h\sum_{i=1}^{s} b_i k_i$$

כאשר h זה צעד אינטגרציה,

$$
\begin{aligned}
&k_1 = f(x_m, y_m),\\
&k_2 = f(x_m + c_2 h, y_m + h(a_{21}k_1)),\\
&k_3 = f(x_m + c_3 h, y_m + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)),\\
&\dots\\
&\mathrm{k}_s = f(x_m + c_s h, y_m + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1}))
\end{aligned}
$$

אז, השיטה מוגדרת על-ידי מספר שלם s ומקדמים

$a_{ij}, 1 \le j < i \le s$, $b_i, i = 1,\dots,s$, $c_i, i = 1,\dots,s$ כך שמתקיים השוויונות

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i,\ i = 2,\dots,s\ .$$

פיתוח עבור $s = 2$: $a_{21} = c_2$

$$y_{m+1} = y_m + h\left(b_1 f(x_m, y_m) + b_2 f(x_m + c_2 h, y_m + c_2 h f(x_m, y_m))\right)$$

רוצים שלשיטה יהיה דיוק מסדר 2. לפי פירוק טיילור,

$$y_{m+1} = y_m + h\left(b_1 + b_2\right) f(x_m, y_m) + h^2 b_2 \left(c_2 f_x'(x_m, y_m) + c_2 f_y'(x_m, y_m) f(x_m, y_m)\right) + O(h^3)$$

עבור פתרון מדויק:

$$y(x_{m+1}) = y_m + hf(x_m, y_m) + \frac{h^2}{2}\left(f_x'(x_m, y_m) + f_y'(x_m, y_m) f(x_m, y_m)\right) + O(h^3)$$

נשווה את המקדמים: $b_1 + b_2 = 1,\ b_2 c_2 = \dfrac{1}{2}$ שתי משוואות עבור שלושה נעלמים.

אם $b_2 = \alpha \ne 0$, אז, $b_1 = 1 - \alpha$, $c_2 = \dfrac{1}{2\alpha}$, כלומר,

$$y_{m+1} = y_m + h\left((1-\alpha) f(x_m, y_m) + \alpha f(x_m + \frac{h}{2\alpha}, y_m + \frac{h}{2\alpha} f(x_m, y_m)\right)$$

ב) (5%) הראו ששיטת אוילר מתוקנת I היא מקרה פרטי של RK2.

<u>פתרון</u>

שיטת אוילר המתוקנת I: $y_{m+1} = y_m + \dfrac{h}{2}\left(f(x_m, y_m) + f(x_m + h, y_m + hf(x_m, y_m))\right)$

נשים לב ששיטה הזאת היא שיטת RK2 עבור $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

ג) (7%) פתרו את בעיית קושי

$$y' = -2xy^2,\ y(0) = 1$$

בשימוש שיטת אוילר מתוקנת I על הקטע $[0,1]$ עם הצעד $h = 0.2$.

פתרון

מחלקים את הקטע $[0,1]$ לחמשה חלקים: $x_0 = 0, x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8, x_5 = 1$.

לפי שיטת אולר המתוקנת I:

$$y_{m+1} = y_m + 0.1\big(f(x_m, y_m) + f(x_m + 0.2, y_m + 0.2 f(x_m, y_m))\big)$$

כאשר $f(x, y) = -2xy^2$.

m	x_m	y_m	$f(x_m, y_m)$	$x_m + 0.2$	$y_m + 0.2 f(x_m, y_m)$	$f(x_m + 0.2, y_m + 0.2 f(x_m, y_m))$	y_{m+1}
0	0	1	0	0.2	1	-0.4	0.96
1	0.2	0.96	-0.37	0.4	0.89	-0.63	0.86
2	0.4	0.86	-0.59	0.6	0.74	-0.66	0.74
3	0.6	0.74	-0.65	0.8	0.61	-0.59	0.61
4	0.8	0.61	-0.60	1.0	0.49	-0.48	0.50

שאלה 4 (25%)

א) (20%) פיתחו את שיטת ההפרשים הסופיים למשוואת גלים במיתר סופי עם מציאת השורה השנייה בשיטת שכבה דמיונית.

פתרון

נתונה הבעיה עבור משוואת הגלים עם תנאיי שפה דיריכלה:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, 0 \le x \le L, \\ u(x,0) = f(x), \\ u_t(x,0) = F(x), \\ u(0,t) = \varphi_0(t), \\ u(L,t) = \varphi_L(t) \end{cases}$$

שמתקיימים תנאיי ההתאמה $f(0) = \varphi_0(0)$, $f(L) = \varphi_L(0)$, $F(0) = \varphi_0'(0)$, $F(L) = \varphi_L'(0)$.

נחלק את הקטע $[0,L]$ ל- n חלקים: $h=\frac{L}{n}$; $x_i=ih,\ i=0,1,\dots,n$;

נגדיר את הנקודות $t_j=jk,\ i=0,1,\dots$, הצעד k לפי הזמן עוד נקבע.

לפי פירוק טיילור:

$$u(x,t-k)=u(x,t)-ku_t(x,t)+\frac{k^2}{2!}u_{tt}(x,t)-\frac{k^3}{3!}u_{ttt}(x,t)+\frac{k^4}{4!}u_{tttt}(x,\eta_1),\ \eta_1\in(t-k,t)$$

$$u(x,t+k)=u(x,t)+ku_t(x,t)+\frac{k^2}{2!}u_{tt}(x,t)+\frac{k^3}{3!}u_{ttt}(x,t)+\frac{k^4}{4!}u_{tttt}(x,\eta_2),\ \eta_2\in(t,t+k)$$

נחבר: $u(x,t-k)+u(x,t+k)=2u(x,t)+k^2u_{tt}(x,t)+O(k^4)$.

אז,

$$u_{tt}(x,t)=\frac{1}{k^2}\left[u(x,t-k)-2u(x,t)+u(x,t+k)\right]+O(k^2).$$

באותו סגנון:

$$u_{xx}(x,t)=\frac{1}{h^2}\left[u(x-h,t)-2u(x,t)+u(x+h,t)\right]+O(h^2)$$

אז,

$$\frac{1}{k^2}\left[u(x_i,t_j-k)-2u(x_i,t_j)+u(x_i,t_j+k)\right]\approx\frac{a^2}{h^2}\left[u(x_i-h,t_j)-2u(x_i,t_j)+u(x_i+h,t_j)\right]$$

כאשר $t_j-k=t_{j-1}, t_j+k=t_{j+1}$, $x_i-h=x_{i-1}$, $x_i+h=x_{i+1}$. נסמן $u_{ij}=u(x_i,t_j)$.

אז,

$$\frac{1}{k^2}\left[u_{i,j-1}-2u_{ij}+u_{i,j+1}\right]\approx\frac{a^2}{h^2}\left[u_{i-1,j}-2u_{ij}+u_{i+1,j}\right]$$

ניקח $k=\frac{h}{a}$. אז,

$$\frac{a^2}{h^2}\left[u_{i-1,j}-2u_{ij}+u_{i+1,j}\right]\approx\frac{a^2}{h^2}\left[u_{i,j-1}-2u_{ij}+u_{i,j+1}\right],$$ אז

$u_{i,j-1}-2u_{ij}+u_{i,j+1}\approx u_{i-1,j}-2u_{ij}+u_{i+1,j}$, ומכאן מתקבלת שיטת ההפרשים הסופיים:

$$u_{i,j+1}=u_{i-1,j}+u_{i+1,j}-u_{i,j-1}$$

כאשר $u_{i0}=f(x_i)=f_i, i=0,1,\dots,n$.

כדי לעבור לשכבה $j=1$ ($t=t_1=k$) אנחנו צריכים להגדיר $u_{i,-1}$ עבור $t=t_{-1}=-k$ (שכבה דמיונית).

$u_t(x_i,0)\approx\dfrac{u(x_i,0)-u(x_i,-k)}{k}$, או $ku_t(x_i,0)=kF(x_i)=kF_i\approx u_{i0}-u_{i,-1}=f_i-u_{i,-1}$.

אז, $u_{i,-1}=f_i-kF_i$.

ב) (5%) מצאו את השכבה הדמיונית $u_{i,-1}$ עם הצעד $h=0.2$ עבור משוואת הגלים

$$\begin{cases} u_{tt}=4u_{xx}, 0\le x\le 1, \\ u(x,0)=x^2-x, \\ u_t(x,0)=x-1, \\ u(0,t)=u(1,t)=0 \end{cases}$$

<u>פתרון</u>

בתרגיל הזה, $x_0=0, x_1=0.2, x_2=0.4, x_3=0.6, x_4=0.8, x_5=1$; $a=2$, ו-: $k=\dfrac{h}{a}=\dfrac{0.2}{2}=0.1$.

$u_{i,-1}=f_i-kF_i=x_i^2-x_i-0.1(x_i-1)$:

$$u_{0,-1}=0.1, u_{1,-1}=-0.08, u_{2,-1}=-0.18, u_{3,-1}=-0.2, u_{4,-1}=-0.14, u_{5,-1}=0$$