משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

דף נוסחאות למבחן

ערכים ופונקציות עצמיות

- פתרון של בעיית ערכים עצמיים (דירכלה):

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y(0) = Y(L) = 0 \end{cases},$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, \; Y_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \; n = 1, 2, 3, ...$$

- פתרון של בעיית ערכים עצמיים (נוימן):

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y'(0) = Y'(L) = 0 \end{cases},$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{L}\right)^2, n = 0, 1, 2, ..., \; Y_0(x) = 1, Y_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \; n = 1, 2, 3, ...$$

- פתרון של בעיית ערכים עצמיים מחזוריים:

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y(0) = Y(2\pi) \\ Y'(0) = Y'(2\pi) \end{cases},$$

$$\lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, ..., \; Y_0(x) = 1, Y_n(x) = \begin{cases} \cos(nx) \\ \sin(nx) \end{cases}, \; n = 1, 2, 3, ...$$

פתרונות של משוואות רגילות

- יהי β מספר חיובי:

$$Y'' - \beta^2 Y = 0 \Longrightarrow Y(x) = A\cosh(\beta x) + B\sinh(\beta x),$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

$$Y'' + \beta^2 Y = 0 \Longrightarrow Y(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x).$$

• פתרון משוואת אוילר:

$$\begin{aligned} x^2Y_n'' + xY_n' - n^2Y_n &= 0, && n = 0,1,2,... \\ Y_0(x) &= A_0\ln(x) + B_0, && n = 0 \\ Y_n(x) &= A_nx^n + B_nx^{-n}, && n = 1,2,3,... \end{aligned}$$

מקדמי וטורי פורייה

- **טור טריגונומטרי:** נתונה פונקציה $f:[-L,L]\to\mathbb{C}$ רציפה למקוטעין,

$$a_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx, \qquad b_n = \frac{1}{L}\int\limits_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx,$$

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right).$$

- **טור קוסינוס:** נתונה פונקציה $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx, \qquad f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{\pi nx}{L}\right).$$

- **טור סינוס:** נתונה פונקציה $f:[0,L]\to\mathbb{R}$ רציפה למקוטעין,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right)dx, \qquad f \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right).$$

תנאי שפה לא הומוגניים (משוואת החום)

פונקציה $w(x,t)$ שמקיימת תנאי שפה:

1. תנאי שפה דירכלה:

$$\begin{cases} u_t - \kappa u_{xx} = 0, & 0 < x < L, 0 \le t \\ u(0,t) = a(t),\ \ u(L,t) = b(t), & 0 \le t \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le L \end{cases}$$

$$w(x,t) = a(t) + \frac{x}{L}(b(t) - a(t))$$

2. תנאי שפה נוימן:

$$\begin{cases} u_t - \kappa u_{xx} = 0, & 0 < x < L, 0 \leq t \\ u_x(0,t) = a(t), u_x(L,t) = b(t), & 0 \leq t \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$w(x,t) = xa(t) + \frac{x^2}{2L}(b(t) - a(t))$$

אינטגרלים

אינטגרלים בקטע $[0, \pi]$

$$\int_0^\pi \sin^2(nx)dx = \int_0^\pi \cos^2(nx)dx = \int_0^\pi \sin^2((\frac{1}{2} + n)x)dx = \int_0^\pi \cos^2((\frac{1}{2} + n)x)dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin(nx)dx = \frac{1 - (-1)^n}{n}$$

$$\int_0^\pi x\sin(nx)dx = \frac{\pi(-1)^{(n+1)}}{n}$$

$$\int_0^\pi x^2\sin(nx)dx = \frac{\pi^2(-1)^{(n+1)}}{n} + \frac{2\left((-1)^{(n)} - 1\right)}{n^3}$$

$$\int_0^\pi x\cos(nx)dx = \frac{(-1)^{(n)} - 1}{n^2}$$

$$\int_0^\pi x^2\cos(nx)dx = \frac{2\pi(-1)^{(n)}}{n^2}$$

אינטגרלים בקטע $[0,a]$, $a>0$

$$\int_0^a \sin^2(\frac{n\pi x}{a})dx = \int_0^a \cos^2(\frac{n\pi x}{a}x)dx = \frac{a}{2}$$
$$\int_0^a \sin(\frac{n\pi x}{a})dx = \frac{a}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n}$$
$$\int_0^a x\sin(\frac{n\pi x}{a}x)dx = \frac{a^2}{\pi}\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}$$
$$\int_0^a x^2\sin(\frac{n\pi x}{a}x)dx = \frac{a^3}{\pi}\frac{(-1)^{(n+1)}}{n} + \frac{a^3}{\pi^3}\frac{2\left((-1)^{(n)}-1\right)}{n^3}$$
$$\int_0^a x\cos(\frac{n\pi x}{a}x)dx = \frac{a^2}{\pi^2}\frac{(-1)^{(n)}-1}{n^2}$$
$$\int_0^a x^2\cos(\frac{n\pi x}{a}x)dx = \frac{a^3}{\pi^2}\frac{2(-1)^{(n)}}{n^2}$$

נוסחאות טריגונומטריות

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\cos(\alpha)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\beta)\sin(\alpha)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\sin(\alpha)$$
$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$
$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$