אלגברה מודרנית - 201015
מבחן מועד א', תשע"ח, 20.2.2018
פתרון

פתרון 1 (25 נק')

א. (15 נק') ברור שאין תנאי על d ובעצם אנו צריכים לבדוק את האילוץ $a^4+b^4+c^4 \equiv 0 \mod 4$. ראשית נוכיח שלכל מספר שלם $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים (מודולו 4)

$$x^4 \equiv \begin{cases} 0 & \text{אם } x \text{ זוגי} \\ 1 & \text{אם } x \text{ אי זוגי.} \end{cases}$$

אכן, נכתוב $x = 2k+i$ כאשר $i \in \{0,1\}$ ואז

$$x^4 \equiv (x^2)^2 = (4k^2+4ki+i^2)^2 \equiv (i^2)^2 \equiv i^4 \equiv \begin{cases} 0 & i=0 \text{ אם} \\ 1 & i=1 \text{ אם.} \end{cases}$$

נובע ש $a^4+b^4+c^4 \in \{0,1,2,3\}$ מודולו 4. התוצאה היא תליה בכמה בין a,b,c אי־זוגיים. יתקיים $a^4+b^4+c^4 \equiv 0$ רק אם a,b,c כולם זוגיים.

ב. (10 נק') יש את הפתרון הטרוויאלי $x=y=z=w=0$. נגדיר קבוצה

$$S = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x,y,z,w \in \mathbb{Z}: \;\; n = x^4+y^4+z^4 = 4w^4\}.$$

נניח בשלילה ש S אינה ריקה. לפי עקרון הסדר הטוב קיים איבר מינימלי n_0 ב S. יהיו $x,y,z,w \in \mathbb{Z}$ כך ש $n_0 = x^4+y^4+z^4 = 4w^4$. לפי הסעיף הקודם, x,y,z,w כולם זוגיים. לכן ניתן לכתוב

$$x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1, w = 2w_1.$$

נציב ונקבל

$$n_0 = 16x_1^4 + 16y_1^4 + 16z_1^4 = 64w_1^4$$

לכן

$$n_0/16 = x_1^4 + y_1^4 + z_1^4 = 4w_1^4 \in S.$$

זאת סתירה לכך ש n_0 האיבר המינימלי ב S. נובע ש S ריקה וסיימנו.

פתרון 2 (25 נק')

א. (15 נק')

ראשית נוכיח ש $\mathrm{ord}(g) \leq \mathrm{ord}(h)$. נסמן $n = \mathrm{ord}(h)$. מכיוון ש g,h צמודים, קיים $k \in G$ כך ש $g = k^{-1}hk$. נובע ש

$$g^n = \underbrace{(k^{-1}hk)(k^{-1}hk)\dots(k^{-1}hk)}_{n \text{ פעמים}} = k^{-1}h^nk = k^{-1}ek = e$$

לכן $\mathrm{ord}(g) \leq n = \mathrm{ord}(h)$. כעת, צמידות היא יחס שקילות, בפרט היא סימטרית. נובע מהחישוב הנ"ל שגם $\mathrm{ord}(h) \leq \mathrm{ord}(g)$ ולכן $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(h)$.

ב. (10 נק') **פתרון 1:** נשתמש בסעיף הקודם. ראשית נציין שהטענה בסעיף א' נכונה גם עבור חבורה אינסופית כאשר האיברים $g,h\in G$ שניהם מסדר סופי (אכן ההוכחה שלנו עדיין נכונה במקרה הזה).

כעת,

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

לכן $\operatorname{ord}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=2$. מצד שני,

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

לכן $\operatorname{ord}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=3$. בפרט, הסדר של שתי המטריצות שונה. נובע מסעיף א' ששתי המטריצות הנתונות אינן צמודות.

פתרון 2: אם שתי מטריצות A,B צמודות, נגיד $A=C^{-1}BC$, אז

$$\det A=\det(C^{-1}BC)=\det C^{-1}\det B\det C=(\det C)^{-1}\det B\det C=\det B.$$

לגבי המטריצות הנתונות,

$$\det\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=-1$$

ו

$$\det\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=1$$

לכן הן אינן צמודות כי הדטרמיננטות שונות.

פתרון 3 (25 נק')

א. (5 נק') נשים לב ש $x,y\in G$ צמודים אם קיים $g\in G$ כך ש

$$x=g^{-1}yg\iff gx=yg\iff y=gxg^{-1}$$

לכן

$$[x]=\{gxg^{-1}\mid g\in G\}=\{g\cdot x\mid g\in G\}=\operatorname{orb}(x).$$

ב. (10 נק') לפי משפט, $|G| = |\mathrm{orb}(x)| \cdot |\mathrm{stab}(x)|$ לכן $|\mathrm{orb}(x)|$ מחלק את $|G|$. אבל $[x] = \mathrm{orb}(x)$. לכן $|[x]|$ מחלק את $|G|$.

ג. (10 נק') ידוע שמחלקת צמידות של תמורה σ היא אוסף כל האיברים של S_3 עם אותו צורה של הרכבת מעגלים זרים כמו σ. לכן מחלקות הצמידות של S_3 הן

$$\begin{aligned}[e] &= \{e\}\\ [(1\ 2) &= \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}\\ [(1\ 2\ 3)] &= \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.\end{aligned}$$

כעת, אם תת חרובה H של S_3 נורמלית, אזי כל מחלקת צמידות או מוכלת ב S_3 או זר מ S_3 (כלומר החיתוך בין H למחלקה זו הוא ריק). מצד שני, לפי משפט לגרנז', $|H|$ מחלק את $|S_3| = 6$ לכן $H \neq [e]\cup[(1\ 2)]$ כי $|[e] \cup [(1\ 2)]| = 4$. מכיוון ש $e \in H$ נשארו רק האפשרויות

$$\begin{aligned}&H = [e],\\ &H = [e] \cup [(1\ 2\ 3)] = A_3,\\ &H = [e] \cup [(1\ 2)] \cup [(1\ 2\ 3)] = S_3.\end{aligned}$$

ידוע שכל תתי חבורה אלו נורמליות ב S_3.

פתרון 4 (25 נק')

א. (10 נק') לכל $a_1 + ib_1, a_2 + ib_2 \in \mathbb{C}$ מתקיים

$$\begin{aligned}\varphi(a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2) &= \varphi(a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2))\\ &= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}\\ &= \varphi(a_1 + ib_1) + \varphi(a_2 + ib_2)\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned}\varphi((a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2)) &= \varphi(a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1))\\ &= \begin{pmatrix} (a_1a_2 - b_1b_2) & (-a_1b_2 - a_2b_1) \\ (a_1b_2 + a_2b_1) & (a_1a_2 - b_1b_2) \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}\\ &= \varphi(a_1 + ib_1) \cdot \varphi(a_2 + ib_2)\end{aligned}$$

לכן φ הומומורפיזם של חוגים.

ב. (10 נק')

$$\begin{aligned}\ker\varphi &= \{a + ib \in \mathbb{C} \mid \varphi(a + ib) = 0\}\\ &= \left\{a + ib \in \mathbb{C} \mid \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}\\ &= \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a = b = 0\} = \{0\}\end{aligned}$$

לכן φ חד־חד־ערכית.

ג. (5 נק') נמצא $z \in \mathbb{C}$ כך שהמטריצה $A = \varphi(z)$ מקיימת $A^4 = -I$. כעת, יתקיים

$$\begin{aligned} A^4 = -I &\iff \varphi(z)^4 = \varphi(-1) \\ &\iff \varphi(z^4) = \varphi(-1) \end{aligned}$$

מכיוון ש φ הומומורפיזם של חוגים לפי סעיף א'. לפי סעיף ב', φ חד־חד־ערכית לכן

$$\varphi(z^4) = \varphi(-1) \iff z^4 = -1.$$

אנו יודעים לפתור את המשוואה $z^4 = -1$ ב $\mathbb{C}$: ניתן לקחת למשל

$$z = e^{i2\pi/8} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ואז

$$A = \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ניתן לבדוק שאכן מטריצה זו מקיימת $A^4 = -I$.