

אלגברה מודרנית - 201015

מבחן אמצע, תשע"ח - 7.12.2017

פתרון

פתרון 1 (25 נק') נתון ש $(a, n) = 1$. לפי הלמה של בזו נובע שקיימים $x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש $xa + yn = 1$. נכפיל ב b ונקבל $xab + ybn = b$. נתון ש $n|ab$ לכן $n|(xab + ybn)$ כלומר $n|b$.

פתרון 2 (25 נק') יהי $a \in \mathbb{Z}$ ויהי r השארית של a מודולו 7. אז $a^k \equiv r^k \pmod{7}$ לכל $k \in \mathbb{N}$ והערכים של r^k מודולו 7 הן לפי הטבלה הבאה:

r	r^3	r^6	r^9
0	0	0	0
1	1	1	1
2	1	1	1
3	-1	1	-1
4	1	1	1
5	-1	1	-1
6	-1	1	-1

נובע מהטבלה שלכל $x \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$x^6 + 3 \in \{3, 4\} \pmod{7}$$

ולכל $y, z \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$y^3 + z^9 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{0, 1, 2, 5, 6\} \pmod{7}$$

לכן $x^6 + 3 \not\equiv y^3 + z^9 \pmod{7}$ לכל $x, y, z \in \mathbb{Z}$. נובע שאין פתרונות שלמים למשוואה

$$x^6 + 3 = y^3 + z^9.$$

פתרון 3 (25 נק')

א. (10 נק') המספרים 0, 3, 6 לא זרים ל 9 והמספרים 1, 2, 4, 5, 7, 8 כן זרים ל 9. לכן

$$G = (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^* = \{[1], [2], [4], [5], [7], [8]\}$$

$$|G| = 6$$

ב. (15 נק')

ראשית נבנה טבלת הכפל עבור G (נכתוב x במקום $[x]$):

	1	2	4	5	7	8
1	1	2	4	5	7	8
2	2	4	8	1	5	7
4	4	8	7	2	1	5
5	5	1	2	7	8	4
7	7	5	1	8	4	2
8	8	7	5	4	2	1

אנו מחפשים קבוצה $K = \{[1], [x], [y]\}$ כך ש K תת חבורה של G .
 חובה ש $[y] = [x]^{-1} \iff [x][y] = 1$. נבדוק את האפשרויות של
 $[x]^2 = [1]$ אם $[x] \neq [1]$ אבל $[x] = [1]$ אז $[x]^2 = [x]$ אם $[x]^2 = [x]$
 אז $[x]^2 = [1] = [x][y]$. נובע ש $[x] = [y]$ אבל $[x] \neq [y]$. נובע ש
 $[x]^2 = [y]$. באופן דומה, $[y]^2 = [x]$. בטבלה הנ"ל רואים שהתנאים
 האלה פוסלים את $[2], [5]$ ו $[8]$ (למשל, אם $[2]$ בקבוצה אז $[2]^2 = [4]$
 אבל $[2] \neq [4]$). נותר לקחת $K = \{[1], [4], [7]\}$. הטבלה של K
 היא

	1	4	7
1	1	4	7
4	4	7	1
7	7	1	4

נובע ש K סגורה ביחס לכפל ולכל איבר יש הופכי (1) ההופכי של
 עצמו ו $[4], [7]$ כל אחד ההופכי של השני. נובע ש K תת חבורה של G .

פתרון 4 (25 נק')

א. (10 נק') לכל $g, h \in G$ מתקיים

$$(gh)^2 = ghgh = g(hg)h = g(gh)h = g^2h^2$$

כי G אבליית.

ב. (10 נק') ברור ש $1 \in H$ לכן H אינה ריקה. אם $x, y \in H$ אז
 $x^2 = y^2 = 1$ לכן $(xy)^2 = x^2y^2 = 1$ על סמך הסעיף הקודם. אם $x \in H$
 אז $1 = x^2$ נובע ש

$$(x^{-1})^2 = (x^{-1})^2 \cdot 1 = (x^{-1})^2 x^2 = (x^{-1}x)^2 = 1^2 = 1$$

שוב על סמך הסעיף הקודם. נובע ש $x^{-1} \in H$. הוכחנו ש H תת
 חבורה של G .

ג. (5 נק') נחשב:

$$\begin{aligned} [1]^2 &= [1] \\ [2]^2 &= [4] \\ [4]^2 &= [7] \\ [5]^2 &= [7] \\ [7]^2 &= [4] \\ [8]^2 &= [1]. \end{aligned}$$

לכן בדוגמא הזאת $H = \{[1], [8]\}$