אלגברה מודרנית - 201015
מבחן מועד ב', תשע"ח, 13.3.2018

שאלה 1 (25 נק') יהיו $a, b, n \in \mathbb{N}$ מספרים טבעיים כך ש $a|n$ ו $b|n$.

א. (15 נק') הראו שאם $(a,b)=1$, (כלומר a ו b זרים אחד לשני) אזי $ab|n$.

ב. (10 נק') תנו דוגמא של מספרים טבעיים a, b, n כאשר $a|n, b|n$ כך ש ab אינו מחלק את n.

שאלה 2 (25 נק') תהי G חבורה ויהי $g \in G$ איבר מסדר $\mathrm{ord}(g) = q$.

א. (15 נק') הוכיחו ש $t \in \mathbb{N}$ מקיים $g^t = 1$ אם ורק אם $q|t$.

ב. (10 נק') מצאו את הסדר של כל אחד מהאיברים g ו g^3 בחבורה $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ כאשר

$$g = e^{i2\pi/1000}.$$

תזכורת: $(\mathbb{C}\backslash\{0\}, \cdot)$ היא חבורת המספרים המרוכבים בלי אפס עם פעולת כפל.

שאלה 3 (25 נק') תהי S_n חבורת התמורות על $\{1, 2, \dots, n\}$. נגדיר

$$A_n = \{\sigma \in S_n \mid \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\}$$

כאשר

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{אם } \sigma \text{ זוגית} \\ -1 & \text{אם } \sigma \text{ אי־זוגית.} \end{cases}$$

נגדיר פונקציה $\varphi : S_n \to (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$ על ידי $\varphi(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)$ לכל $\sigma \in S_n$. ידוע ש φ הומומורפיזם.

א. (5 נק') הראו ש $\ker \varphi = A_n$.

ב. (10 נק') הוכיחו ש A_n תת חבורה של S_n והראו שהיא נורמלית ב S_n.

ג. (10 נק') הוכיחו שהאינדקס של A_n ב S_n הוא 2.

שאלה 4 (20 נק') לחוג R עם אדיש כפלי 1, נאמר שאיבר $a \in R$ הופכי לעצמו אם $a \cdot a = 1$.

א. (15 נק') יהי p מספר ראשוני. יהי $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ השדה מסדר p. מצאו את כל האיברים $a \in \mathbb{F}_p$ כך ש a הופכי לעצמו.

הצעה: ראשית הראו ש $a \in \mathbb{F}_p$ הופכי לעצמו אם ורק אם a שורש של הפולינום $x^2 - 1$.

ב. (10 נק') יהי $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ חוג המנה של תחום השלמות $\mathbb{Z}$ באידאל $8\mathbb{Z}$ עם אדיש כפלי $1 + 8\mathbb{Z}$. מצאו את כל האיברים $a + 8\mathbb{Z}$ ב $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ כך ש $a + 8\mathbb{Z}$ הופכי לעצמו.