אלגברה מודרנית - 201015

מבחן מועד א', תשע"ח, 20.2.2018

שאלה 1 (25 נק')

א. (10 נק') יהיו $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ מספרים שלמים המקיימים
$$a^4 + b^4 + c^4 \equiv 4d^4 \mod 4.$$
הראו ש $a \equiv b \equiv c \equiv 0 \mod 2$.

ב. (15 נק') הוכיחו שלמשוואה $x^4 + y^4 + z^4 = 4w^4$ קיים רק פתרון אחד כאשר $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$.

שאלה 2 (25 נק')

א. (15 נק') תהי G חבורה סופית. הוכיחו שאם $g, h \in G$ צמודים ב G אז $\mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(h)$.

ב. (10 נק') תהי $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \cdot)$, חבורת המטריצות ההפיכות מסדר 3×3. הראו שהאיברים
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
אינם צמודים ב $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \cdot)$.

שאלה 3 (25 נק') תהי G חבורה סופית. נגדיר פעולה של G על עצמה על ידי הצמדה:
$$g \cdot x = gxg^{-1}$$
לכל $g, x \in G$. ניתן להניח שפעולה זו אכן פעולה של חבורה על קבוצה לפי ההגדרה.

א. (5 נק') הראו שלכל $x \in G$ מתקיים $\mathrm{orb}(x) = [x]$, כאשר $[x]$ מחלקת הצמידות של x ב G ו $\mathrm{orb}(x)$ המסלול של x תחת הפעולה הנ"ל.

ב. (10 נק') הראו שעבור כל מחלקת צמידות $[x]$, הגודל של הקבוצה $[x]$ מחלק את הסדר של G.

ג. (10 נק') תהי S_3 חבורת התמורות על $\{1, 2, 3\}$. מצאו את כל תתי החבורה הנורמליות של S_3. נמקו מדוע תתי החבורה שמצאתם הן **כל** תתי החבורות הנורמליות של S_3.

שאלה 4 (25 נק')

נתבונן בשדה $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ובחוג $(\mathbb{R}^{2\times 2}, +, \cdot)$ עם הפעולות הרגילות של חיבור וכפל המוגדרות עליהם. נגדיר פונקציה $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ על ידי
$$\varphi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$
לכל $a + ib \in \mathbb{C}$.

א. (10 נק') הראו שהפונקציה φ הומומורפיזם של חוגים.

ב. (10 נק') הראו ש φ חד־חד־ערכית.

ג. (5 נק') מצאו מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש $A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

אזהרה: שימו לב שיש למצוא מטריצה עם מקדמים ממשיים!