

# אלגברה מודרנית - 201015

מבחן אמצע, תשע"ח - 7.12.2017

**שאלה 1** (25 נק') יהיו  $a, b, n \in \mathbb{N}$  כך ש  $n|ab$  ו  $(a, n) = 1$  (כלומר,  $a, n$  זרים זה לזה). הוכיחו ש  $n|b$ .

**שאלה 2** (25 נק') הוכיחו שלא קיימים פתרונות שלמים למשוואה

$$x^6 + 3 = y^3 + z^9.$$

**הצעה:** נתחו את המשוואה מודולו 7.

**שאלה 3** (25 נק') תהי  $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} = \{[0], [1], \dots, [8]\}$  קבוצת המחלקות מודולו 9. תהי

$$G = (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^* = \{[x] \in \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \mid (x, 9) = 1\}$$

חבורת המחלקות ההפיכות מודולו 9 עם פעולת כפל המוגדרת על ידי

$$[x] \cdot [y] = [xy].$$

א. (10 נק') מהו הסדר של  $G$ ? מצאו את כל האיברים (המחלקות) ב  $G$ .

ב. (15 נק') מצאו תת חבורה  $K$  של  $G$  כך ש  $K$  מסדר 3.

**שאלה 4** (25 נק') תהי  $G$  חבורה אבלית ונסמן את האדיש של  $G$  על ידי 1.

א. (10 נק') הוכיחו שלכל  $g, h \in G$  מתקיים  $(gh)^2 = g^2h^2$ .

ב. (10 נק') נגדיר תת קבוצה  $H$  של  $G$  על ידי

$$H = \{x \in G \mid x^2 = 1\}.$$

הוכיחו ש  $H$  תת חבורה של  $G$ .

ג. (5 נק') חשבו את  $H$  מהסעיף הקודם עבור החבורה  $G = (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$  הנתונה בשאלה 3.

**הערה:** בסעיפים א' ו ב' אין להניח ש  $G = (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$ .