

# אלגברה מודרנית למחצה - 201015

מבחן מועד י', 43 בפברואר 1917 (לפני שנולדת...)

**שאלה 1** (20 נק') נתונים שני עצי פרי: עץ זית ועץ רימון. ידוע שלעץ זית יש פירות כל  $z$  שנים ולעץ רימון יש פירות כל  $r$  שנים כאשר  $z, r$  הם ראשוניים שונים. ידוע שבשנה הנוכחית לשני העצים יש פירות. עוד כמה שנים יהיו שוב לשני העצים פירות באותה השנה (תנו את המספר המינימלי). נמקו.

**שאלה 2** (20 נק') תהי  $G$  חבורה ציקלית וסופית מסדר  $n$ . יהי  $a$  מייצר של  $G$ .

א. (15 נק') הראו שלכל  $k \in \mathbb{N}$  כך ש  $(n, k) = 1$  האיבר  $a^k$  גם מייצר את  $G$ .

ב. (5 נק') נסמן ב  $e$  האדיש של  $G$ . הראו שאם  $n$  מספר ראשונה אז כל איבר  $a \neq e$  מייצר את  $G$ .

**שאלה 3** (20 נק') בשאלה הזאת נסמן ב  $S_5$  חבורת התמורות על  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  עם פעולת הרכבה של פונקציות. נסמן ב  $A_5$  תת החבורה של תמורות זוגיות ב  $S_5$ .

א. (10 נק') הוכיחו ש  $A_5$  תת חבורה של  $S_5$ .

ב. (10 נק') הוכיחו ש  $A_5$  נורמלית ב  $S_5$  ומצאו את האינדקס של  $A_5$  ב  $S_5$ .

**שאלה 4** (10 נק') תהי  $G$  חבורה ותהי  $H$  תת חבורה של  $G$ . הוכיחו שלכל  $a \in G$  הקבוצה  $a^{-1}Ha = \{a^{-1}ha \mid h \in H\}$  היא תת חבורה של  $G$ .

**שאלה 5** (20 נק') תהי  $G = GL_n(\mathbb{R})$  חבורת המטריצות  $n \times n$  ויהי  $V = \mathbb{R}^n$ . נגדיר פעולה של  $G$  על  $V$  על ידי  $A \cdot x = Ax$  לכל  $A \in GL_n(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$ . בשאלו זו מותר להניח שהפעולה הנ"ל אכן פעולה של חבורה על קבוצה.

א. (10 נק') יהי  $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ . הוכיחו ש  $A \in \text{stab}_G(x)$  אם ורק אם  $x$  וקטור עצמי של  $A$  עם ערך עצמי 1.

ב. (10 נק') הוכיחו שלכל  $A \in GL_n(\mathbb{R})$  הקבוצה

$$\text{fix}_G(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = x\}$$

תת מרחב של  $\mathbb{R}^n$ .

**שאלה 6** (10 נק') יהי  $R$  חוג קומוטטיבי עם 1.

א. (5 נק') הוכיחו שאם  $R$  שדה אז  $R$  תחום שלמות.

ב. (5 נק') הוכיחו שמנת החוג  $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 \rangle$  אינו שדה.