

אלגברה מודרנית למחצה - 201015

מבחן מועד ל', 32 ביולי 1916 (לפני שנולדתי...)

שאלה 1 (20 נק')

א. (10 נק') מצאו את כל הפתרונות למשוואה

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \equiv 5f^4 \pmod{5}.$$

ב. (10 נק') מצאו את כל הפתרונות השלמים למשוואה

$$w^4 + x^4 + y^4 + z^4 = 5t^4.$$

שאלה 2 (10 נק') תהי G חבורה ותהיינה H, K תתי חבורה ציקליות של G כך ש $|H| = 51, |K| = 18$. הוכיחו שהחבורה $H \cap K$ ציקלית והוכיחו שהסדר שלה לכל היותר 3.

שאלה 3 (20 נק') בשאלה הזאת נסמן ב S_4 חבורת התמורות על $\{1, 2, 3, 4\}$ עם פעולת הרכבה של פונקציות. נסמן ב $V = \{e, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ מותר להשתמש בעובדה ש V תת חבורה של S_4 .

א. (10 נק') הראו ש $H = \{e, (1\ 2)(3\ 4)\}$ תת חבורה של V והוכיחו ש H נורמלית ב V .

ב. (10 נק') הוכיחו או הפריכו: $H = \{e, (1\ 2)(3\ 4)\}$ תת חבורה נורמלית של S_4 .

הערה: בגרסה קודמת של המבחן הדגירו את H באופן לא תקין.

שאלה 4 (20 נק') תהי G חבורה מסדר סופי n כאשר $n \in \mathbb{N}$. תהי H תת חבורה של G . נגדיר פעולה של H על G על ידי $h \cdot g = hg$ לכל $h \in H, g \in G$. בשאלו זו מותר להניח שהפעולה הנ"ל אכן פעולה של חבורה על קבוצה.

א. (10 נק') הוכיחו שלכל $g \in G$ מתקיים $\text{stab}_H(g) = \{e\}$.

ב. (10 נק') הוכיחו שלכל $g \in G$ מתקיים $\text{orb}_H(g) = Hg$.

שאלה 5 (20 נק') תהיינה G, K

חבורת ותהי $\varphi: G \rightarrow K$ הומומורפיזם.

א. (10 נק') הוכיחו שאם הסדר של איבר $g \in G$ סופית, $\text{ord}(g) = n$ ואז הסדר של $\varphi(g)$ מסדר סופי והוכיחו ש $r \leq n$ כאשר r הסדר של $\varphi(g)$ ב K .

ב. (10 נק') תנו דוגמא של חבורה אינסופית G כך ש $\text{ord}(x)$ סופי לכל $x \in G$.

שאלה 6 (20 נק') יהי F שדה.

א. (10 נק') יהי I אידאל של F . הוכיחו ש $I = F$ או $I = \{0\}$.

ב. (10 נק') יהי R חוג קומוטטיבי ותהי $\varphi: F \rightarrow R$ הומומורפיזם של חוגים. הוכיחו ש $\text{Im}\varphi \cong F$ או $\text{Im}\varphi = \{0\}$.

הערה: בגרסה קודמת של המבחן היה כתוב בטעות $\text{Im}\varphi = F$.