אלגברה מודרנית למחצה - 201015
מועד ט', 35 בפברואר 1916 (לפני שנולדתי...)

שאלה 1 (10 נק') יהי $a, b, n \in \mathbb{N}$ כך ש $n|ab$ ו $n \not| a$, $n \not| b$, כלומר n מחלק את ab אך אינו מחלק את a או את b. הוכיחו ש n אינו ראשוני.

שאלה 2 (20 נק') בשאלה הזאת נסמן ב S_3 חבורת התמורות על $\{1, 2, 3\}$ עם פעולת הרכבה של פונקציות.

א. (15 נק') מצא את כל תתי החבורה האבליות של S_3.

ב. (5 נק') הוכיחו או הפריכו: אם G חבורה כך שקיים תת חבורה אבלית H של G נובע ש G אבלית.

שאלה 3 (10 נק') תהי G חבורה ותהי H תת חבורה של G. נגדיר קבוצה $N = \{g \in G \mid g^{-1}Hg = H\}$.

א. (5 נק') הוכיחו ש N תת חבורה של G.

ב. (5 נק') תהי M תת חבורה של G כך ש H תת חבורה נורמלית של M. הוכיחו ש $M \subseteq N$.

שאלה 4 (20 נק') תהי G חבורה מסדר סופי p^n כאשר p מספר ראשונה ו $n \in \mathbb{N}$. נגדיר פעולה של G על עצמו על ידי הצמדה: לכל $g, k \in G$ נגדיר $g \cdot k = gkg^{-1}$. בשאלו זו מותר להניח שהפעולה הנ"ל אכן פעולה של חבורה על קבוצה. נסמן ב $Z = \{g \in G \mid y \in G \text{ לכל } gy = yg\}$.

א. (10 נק') הוכיחו שלכל $\mathbf{z} \in Z$ מתקיים $\text{orb}_G(z) = \{z\}$.

ב. (5 נק') הוכיחו שלכל $x \notin Z$ מתקיים $|\text{orb}_G(x)| = p^k$ כאשר $1 < k \leq n$.

שאלה 5 (20 נק') יהי $n \in \mathbb{N}$ מספר טבעי. הוכיחו שהתחום השלמות $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ הוא תחום אידאל ראשי. כלומר, הוכיחו שכל אידאל I של $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ הוא בצורה של $x\mathbb{Z}$ כאשר $x \in \mathbb{Z}$.

שאלה 6 (20 נק') יהי p מספר ראשוני.
נגדיר קבוצה $\mathbb{F}_p = \{0, \ldots, p-1\}$ עם פעולות $+, \cdot$ מודולו p. הוכיחו ש $\mathbb{F}_p$ שדה. בסעיף הזה מותר להניח ש $\mathbb{F}_p$ חוג קומוטטיבי עם 1.