אלגברה מודרנית - 201015
מבחן מועד א', תשע"ט, 4.3.2019
פתרונות

פתרון 1 (20 נק')

א. (5 נק') נאמר ש m,n זרים אחד לשני אם מתקיים $\gcd(m,n)=1$, כלומר המחלק הגדול ביותר שלהם שווה ל 1.

ב. (5 נק') נסמן ב $t=\gcd(p,q)$ המחלק הגדול ביותר של p,q. מכיוון ש $t|p$ ו p ראשוני, נובע ש $t=1$ או $t=p$. מכיוון ש $t|q$ ו q ראשוני, נובע ש $t=1$ או $t=q$. אבל $p\neq q$ לכן $\gcd(p,q)=t=1$ ו p,q זרים אחד לשני.

ג. (10 נק') אם $a=1$ אז a אינו ראשוני (בהגדרה). אם $a>1$ אז קיים מספר ראשוני p שמחלק את a. כעת,

$$p|ab \implies p|c^2$$

לכן $p|c$ כי p ראשוני. נובע ש

$$p^2|c^2 \implies p^2|ab.$$

נתון ש a,b זרים אחד לשני. נובע ש p,b זרים אחד לשני כי אחרת p היה מחלק משותף של a,b. לכן $\gcd(p^2,b)=1$ ונובע ש $p^2|a$. בפרט, a אינו ראשוני.

הערה: ישנה גם אפשרות להוכיח את הטענה בעזרת המשפט היסודי של אריתמטיקה.

פתרון 2 (20 נק')

א. (5 נק') נאמר ש g צמוד ל h אם קיים $k\in G$ כך ש $g=khk^{-1}$.

ב. (10 נק') נסמן $\operatorname{ord}(g)=n, \operatorname{ord}(h)=m$ ונסמן ב e את האדיש ב G. מכיוון ש g,h צמודים קיים $k\in G$ כך ש $g=khk^{-1}$. כעת, לכל $t\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$g^t=\underbrace{(khk^{-1})(khk^{-1})\cdots(khk^{-1})}_{\text{פעמים } t}=kh^tk^{-1}.$$

בפרט, $g^m=kh^mk^{-1}=kek^{-1}=e$ לכן $n\leq m$. כעת, צמידות היא יחס שקילות לכן היא סימטרית. נובע ש $m\leq n$ וניתן להסיק כי $m=n$.

ג. (5 נק') נציין ש $\operatorname{ord}(\sigma)=2\neq 3=\operatorname{ord}(\rho)$. לפי הסעיף הקודם, לא יתכן ש σ צמוד ל ρ.

פתרון 3 (20 נק')

א. (5 נק')

$$\ker(\varphi)=\{g\in G \mid \varphi(g)=e_K\}$$

כאשר e_K האדיש ב K.

ב. (10 נק') נניח ש φ חח"ע. יהי $g \in \ker\varphi$, אז $\varphi(g) = e_K = \varphi(e_G)$. מכיוון ש φ חח"ע מתקבל ש $g = e_G$. נובע ש $\ker\varphi$ מכיל רק את e_G.

בכיוון ההפוך, נניח ש $\ker\varphi = \{e_G\}$. יהיו $g, h \in G$ כך ש $\varphi(g) = \varphi(h)$. נובע ש $\varphi(h)^{-1}\varphi(g) = e_K$ לכן $\varphi(h^{-1}g) = e_K$ כלומר $h^{-1}g \in \ker\varphi = \{e_G\}$. לכן $h^{-1}g = e_G \Leftarrow g = h$ ונובע ש φ חח"ע.

ג. (5 נק')

יהיו $z, w \in \mathbb{C}$. אז

$$\varphi(z+w) = \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w} = \varphi(z) + \varphi(w)$$

לכן φ הומומורפיזם. נמצא את הגרעין:

$$z \in \ker(\varphi) \iff \varphi(z) = \overline{z} = 0 \iff z = 0$$

כי

$$a - ib = 0 \iff a + ib = 0 \iff a = b = 0.$$

נובע ש $\ker(\varphi) = \{0\}$ לכן φ חד־חד־ערכית. יהי $z \in \mathbb{C}$, אז

$$\varphi(\overline{z}) = \overline{\overline{z}} = z$$

ונובע ש φ על. מתקבל ש φ איזומורפיזם.

פתרון 4 (20 נק')

א. (5 נק') תת קבוצה I של R נקרא אידאל אם היא תת חוג של R ומתקיימים $ra \in I$ ו $ar \in I$ לכל $r \in R, a \in I$.

ב. (10 נק') לפי הנתון, לכל $a \in R$ מתקיים $a \cdot 1 \in I$ כי $1 \in I$. נובע שכל איבר של R שייך ל I ולכן $I = R$.

ג. (5 נק') לפי שאלה 1 סעיף ב' המספרים הראשוניים p, q זרים אחד לשני. לפי הלמה של בזו קיימים $x, y \in \mathbb{Z}$ כך ש $xp + yq = 1$. כעת, J תת חוג של $\mathbb{Z}$ לכן $1 = xp + yq \in J$. לפי הסעיף הקודם, האידאל J שווה ל $\mathbb{Z}$.

פתרון 5 (20 נק')

א. (5 נק') המנה G/N היא אוסף הקוסטים:

$$G/N = \{gN \mid g \in G\};$$

עליו מוגדרת פעולה על ידי

$$(gN)(hN) = ghN.$$

ב. (10 נק') יהיו $z \in Z, g \in G$. אז

$$gzg^{-1} = zgg^{-1} = ze = z$$

(כאשר e האדיש) כי $gz = zg$ עבור $z \in Z$. נובע ש $gZg^{-1} \subseteq Z$ לכל $g \in G$ ולכן Z נורמלית ב G.

ג. (5 נק') יהיו $gZ, hZ \in G/Z$. עלינו להראות כי $gZhZ = hZgZ$. כעת,

$$\begin{aligned} gZhZ = hZgZ &\iff ghZ = hgZ \\ &\iff h^{-1}ghZ = gZ \\ &\iff g^{-1}h^{-1}ghZ = Z \\ &\iff g^{-1}h^{-1}gh \in Z. \end{aligned}$$

מכיוון שהטענה האחרונה מתקיימת לפי הנתון, אכן $gZhZ = hZgZ$ ונובע שהמנה G/Z אבלית.