

אלגברה מודרנית - 201015

מבחן מועד ב', תשע"ט, 24/3/2019

שאלה 1 (20 נק')

- א. (5 נק') עבור $a, b \in \mathbb{Z}$ ו $n \in \mathbb{N}$ הגדירו: $a \equiv b \pmod{n}$.
- ב. (5 נק') הראו שלכל $a, m, p \in \mathbb{N}$, אם p מספר ראשוני ו p מחלק את a^m אזי p מחלק את a .
- ג. (10 נק') הוכיחו שלמשוואה $x^4 = 5(y^4 + z^4)$ אין פתרונות עבור $x, y, z \in \mathbb{N}$.

שאלה 2 (20 נק') תהי G חבורה.

- א. (5 נק') הגדירו את הסדר של איבר $x \in G$.
- ב. (10 נק') אם G סופית מסדר $|G| = n \in \mathbb{N}$ הוכיחו שלכל $g \in G$ מתקיים $\text{ord}(g) | n$, כלומר הסדר של האיבר g מחלק את n .
- ג. (5 נק') תהי H תת חבורה של S_3 . נתון ש H מכילה איברים $\sigma, \rho \in S_3$ כך ש $\text{ord}(\sigma) = 2$, $\text{ord}(\rho) = 3$ והוכיחו ש $H = S_3$.
- אזהרה:** בסעיף ג' אין לבחור את האיברים σ, ρ .

שאלה 3 (20 נק') נגדיר פונקציה $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$ על ידי $\phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ כאשר $(\mathbb{Z}, +)$ ו $(\text{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ חבורות.

- א. (5 נק') הראו ש ϕ הומומורפיזם.
- ב. (5 נק') הראו ש ϕ חד-חד-ערכי.
- ג. (10 נק') מצאו מטריצה ב $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ **לא אלכסונית** עם סדר אינסופי. נמקו.

שאלה 4 (20 נק') תהי G חבורה סופית מסדר n .

- א. (5 נק') עבור תת חבורה H של G הגדירו: H נורמלית ב G .
- ב. (5 נק') אם G אבלית נמקו מדוע כל תת חבורה של G נורמלית.
- ג. (10 נק') יהי p מספר ראשוני שמחלק את $|G| = n$. נסמן $t = n/p$. הוכיחו שאם H תת חבורה נורמלית של G מסדר $|H| = t$, אזי המנה G/H ציקלית.
- אזהרה:** בסעיף ג' אין להניח ש G אבלית ואין להניח שהיא ציקלית.

שאלה 5 (20 נק') יהי R חוג קומוטטיבי עם 1. נגדיר תת קבוצה של R על ידי

$$U = \{a \in R \mid \exists b \in R \text{ כך ש } ab = 1\}$$

ידוע ש (U, \cdot) חבורה. שימו לב ש U הוא אוסף כל האיברים של R בעלי הופכי כפלי ב R .

א. (5 נק') מצאו את כל האיברים של U במקרה בספציפי שבו $R = (\mathbb{Z}, +, \cdot)$. נמקו.

ב. (10 נק') הראו שלכל $u \in U$ מתקיים $\langle u \rangle = R$ כאשר $\langle u \rangle = \{ru \mid r \in R\}$.

ג. (5 נק') יהי I אידאל של R . נגדיר $G = \{a \in U \mid a - 1 \in I\}$. הוכיחו ש G תת חבורה של U .

אזהרה: אין קשר בין הסעיפים. בסעיפים ב' ו ג' אין להניח ש R שווה ל \mathbb{Z} .