

# אלגברה מודרנית - 201015

מבחן מועד א', תשע"ט, 4.3.2019

## שאלה 1 (20 נק')

- א. (5 נק') הגדירו: מספרים טבעיים  $m, n$  זרים אחד לשני.
- ב. (5 נק') הראו שאם  $p, q$  מספרים ראשוניים שונים אזי הם זרים אחד לשני.
- ג. (10 נק') יהיו  $a, b, c \in \mathbb{N}$  המקיימים  $ab = c^2$  כך ש  $(a, b) = 1$ , כלמור  $a, b$  זרים אחד לשני. הוכיחו ש  $a$  אינו ראשוני.

## שאלה 2 (20 נק')

- א. (5 נק') תהי  $G$  חבורה. הגדירו: צמוד ל  $h$  כאשר  $g, h \in G$ .
- ב. (10 נק') תהי  $G$  חבורה. יהיו  $g, h \in G$  שני איברים צמודים כל אחד בעל סדר סופי. הוכיחו ש  $\text{ord}(g) = \text{ord}(h)$ .
- ג. (5 נק') יהיו  $\sigma = (1\ 2), \rho = (1\ 2\ 3) \in S_3$ . הוכיחו ש  $\sigma$  אינה צמודה ל  $\rho$ .

## שאלה 3 (20 נק')

- תהיינה  $G, K$  חבורות ותהי  $\varphi : G \rightarrow K$  הומומורפיזם. נסמן ב  $e_G$  האדיש ב  $G$ .
- א. (5 נק') הגדירו את הגרעין  $\ker(\varphi)$  של ההומומורפיזם  $\varphi$ .
- ב. (10 נק') הוכיחו ש  $\ker(\varphi)$  חד־חד־ערכית אם ורק אם  $\ker(\varphi) = \{e_G\}$ .
- ג. (5 נק') תהי  $(\mathbb{C}, +)$  חבורת המספרים המרוכבים עם פעולת חיבור. נגדיר פונקציה  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  על ידי  $\varphi(z) = \bar{z}$  כאשר  $\bar{z}$  מסמן את הצמוד של המספר המרוכב  $z$ . הראו ש  $\varphi$  איזומורפיזם.

## שאלה 4 (20 נק') יהי $R$ חוג קומוטטיבי עם 1.

- א. (5 נק') הגדירו:  $I$  אידאל של  $R$ .
- ב. (10 נק') הוכיחו שאם  $I$  אידאל של  $R$  ומתקיים  $1 \in I$  אזי  $I = R$ .
- ג. (5 נק') יהי  $J$  אידאל של החוג  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ . אם  $J$  מכיל שני ראשוניים שונים  $p, q$  הראו ש  $J = \mathbb{Z}$ .

## שאלה 5 (20 נק') תהי $G$ חבורה.

- א. (5 נק') עבור תת חבורה נורמלית  $N$  של  $G$  הגדירו את המנה  $G/N$ .
- ב. (10 נק') ידוע שהמרכז  $Z$  הוא תת חבורה של  $G$ . הוכיחו ש  $Z$  נורמלית ב  $G$ .
- ג. (5 נק') אם מתקיים  $g^{-1}h^{-1}gh \in Z$  לכל  $g, h \in G$ , הוכיחו שהמנה  $G/Z$  אבלית.
- תזכורת:** המרכז  $Z$  של  $G$  מוגדר על ידי

$$Z = \{g \in G \mid \text{לכל } h \in G \text{ } gh = hg\}.$$