מטלה מס' 10 אלגברה מודרנית
להגשה: עד יום ג' 5 בפבואר
פתרון

1. (30 נק')

(א) (20 נק') יהיו $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$. אזי

$$\varphi(z+w) = \varphi(a+c+i(b+d)) = \begin{pmatrix} a+c & -b-d \\ b+d & a+c \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \varphi(z) + \varphi(w)$$

ו

$$\varphi(zw) = \varphi(ac-bd+i(ad+bc)) = \begin{pmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \varphi(z)\varphi(w)$$

לכן φ הומומורפיזם של חוגים.

(ב) (20 נק') ההומומורפיזם φ חח"ע אם ורק אם $\ker\varphi = \{0\}$. כעת,

$$\varphi(a+ib) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff a = b = 0 \iff a + ib = 0$$

לכן $\ker\varphi = \{0\}$ ואכן φ חח"ע.

(ג) (20 נק') נגדיר פונקציה $\psi : \mathbb{C} \to \mathrm{Im}(\varphi)$ על ידי $\psi(z) = \phi(z)$. אזי ψ הומומורפיזם חח"ע וגם על לכן היא איזומורפיזם. נובע ש $\mathrm{Im}(\varphi) \cong \mathbb{C}$. אבל $\mathbb{C}$ שדה. נובע ש $\mathrm{Im}(\varphi)$ שדה.

(ד) (20 נק') אם $a = b = 0$ אז ניתן לקחת (למשל) $r = 0,\ \theta = 0$. באופן כללי, אם $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ניתן לכתוב את $A = \varphi(a+ib)$. נכתוב את $a + ib$ בצורה קוטבית $a + ib = r\mathrm{cis}(\theta)$ ואז נקבל

$$A = \begin{pmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(ה) (20 נק') נפעיל את ההומומורפיזם φ על המשוואה $i^2 = -1$. כעת,

$$\varphi(i^2) = \varphi(-1)$$
$$\Longrightarrow \varphi(i)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

לכן ניתן לקחת $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(ו) (בונוס, 10 נק')

הערות: הייתה שגיאה בניסוח השאלה. התנאי על f צריך להיות $\deg f \geq 1$.

לפי המשפט היסודי של אלגברה, ל f קיים שורש w כך ש

$$f(w) = a_n w^n + \cdots + a_1 w + a_0 = 0. \tag{1}$$

נכתוב $A = \varphi(w)$. נפעיל את האיזומורפיזם φ על משוואה (1) ונבקל

$$\begin{aligned}
&\varphi(a_n w^n + \cdots + a_1 w + a_0) = \varphi(0) = 0 \\
\iff\ & a_n \varphi(w)^n + \cdots + a_1 \varphi(w) + a_0 I = 0 \\
\iff\ & a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0 \\
\iff\ & f(A) = 0.
\end{aligned}$$