מטלה מס' 8 אלגברה מודרנית
להגשה: עד יום ג' 22 בינואר
פתרון

1. (א) (30 נק') יהי e האדיש ב G. נסמן $\text{ord}(x) = n$. יהי איבר $y \in G$ צמוד ל x ונסמן $\text{ord}(y) = m$. אז קיים $g \in G$ כך ש $y = gxg^{-1}$. כעת,

$$y^n = (gxg^{-1})^n = \underbrace{gxg^{-1}gxg^{-1}\cdots gxg^{-1}}_{n \text{ פעמים}} = gx^ng^{-1} = geg^{-1} = e.$$

לפי ההגדרה של סדר, נובע ש $m = \text{ord}(y) \le n$. אבל צמידות היא יחס שקילות, בפרט היא סימטרית. נובע שגם $n \le m$ ולכן $\text{ord}(y) = m = n = \text{ord}(x)$.

(ב) (10 נק') נחשב את הסדר של כל מטריצה. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ לכן $\text{ord}(A) = 2$. לגבי B, נחשב

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B^3 = B^2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן $\text{ord}(B) = 3$. לפי הסעיף הקודם A, B אינן צמודות מכיוון שיש להן סדר שונה.

2. (א) (10 נק') יהי $y \in N$. לכל $x \in [y]$ מתקיים $x \sim y$ לכן קיים $g \in G$ כך ש $x = gyg^{-1}$. כעת, $gyg^{-1} \in N$ כי $y \in N$ ו N נורמלית. קיבלנו ש $x \in N$. נובע ש $[y] \subseteq N$.

(ב) (10 נק')

$$N = \bigcup_{n \in N} n \subseteq \bigcup_{n \in N} [n] \subseteq N$$

כי $n \in [n]$ לכל n ו $[n] \subseteq N$ לכל $n \in N$ לפי הסעיף הקודם. נובע ש

$$\bigcup_{n \in N} [n] = N$$

כפי הנדרש.

(ג) (10 נק') יהיו x, y צמודים ב G. אז קיים $g \in G$ כך ש $x = gyg^{-1}$. נשים לב כי $g^{-1}N$ ההופכי של gN במנה G/N. כעת,

$$gNyNg{-}1N = gyg^{-1}N = xN$$

לכן xN, yN צמודים.

.3 (30 נק') לפי שאלה 2 סעיף ב' כל תת חבורה נורמלית של S_4 היא איחוד של מחלקת צמידות. למדנו שעבור חבורת תמורות מחלקות הצמידות נקבעות על ידי המבנה של איבר כהרכבה של מחזורים זרים. לכן

$$\begin{aligned}
[e] &= \{e\} \\
[(1\ 2)] &= \{(1\ 2),(1\ 3),(1\ 4),(2\ 3),(2\ 4),(3\ 4)\} \\
[(1\ 2)(3\ 4)] &= \{(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\} \\
[(1\ 2\ 3)] &= \{(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(1\ 2\ 4),(1\ 4\ 2),(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 3),(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3)\} \\
[(1\ 2\ 3\ 4)] &= \{(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 2\ 4\ 3),(1\ 3\ 2\ 4),(1\ 3\ 4\ 2),(1\ 4\ 2\ 3),(1\ 4\ 3\ 2)\}.
\end{aligned}$$

לפי משפט לגרנז', הסדר של תת חבורה של S_4 מחלק את $|S_4| = 24$ לכן האפשרויות הן $1,2,3,4,6,8,12,24$. כמובן נקבל 1 רק עבור תת החבורה $\{e\}$ ונקבל 24 רק עבור S_4 עצמה. נשארות לנו אופציות $2,3,4,6,8,12$.

עבור תת חבורה נורמלית, אנו צריכים איחוד של המחלקות הנ"ל, כולל האדיש. חוץ מ $[e]$, כל מחלקה אחרת מכילה לפחות 3 איברים, לכן אין אפשרות לקבל תת חבורה נורמלית מסדר 2 או 3. המספרים האפשריים הם כבר מצומצמים לאפשרויות $4,6,8,12$. נקבל את 4 רק על ידי תת החבורה $K = [e] \cup [(1\ 2)(3\ 4)]$. ידוע ש K תת חבורה וקל לראות שהיא נורמלית כי ההיא איחוד של מחלקות שקילות שכל אחת מהן סגורה ביחס להצמדה. האפשרויות שנשארות הן $6,8,12$, כולן זוגיות. על מנת להגיע למספר זוגי, חייב להיות ש e וגם $[(1\ 2)(3\ 4)]$ מוכלים בתת החבורה. אבל כל מחלקת צמידות אחרת מכילה לפחות 6 איברים, אז נקבל לפחות $1+3+6=10$ איברים. לכן האופציה היחידה שנשארה היא 12. נגיע ל 12 רק על ידי האיחוד $A_4 = \{e\} \cup [(1\ 2)(3\ 4)] \cup [(1\ 2\ 3)]$. מצאנו שכל תתי החבורות הנורמלית של S_4 הן $\{e\}, K, A_4, S_4$.