מטלה מס' 7 אלגברה מודרנית
להגשה: עד יום ג' 15 בינואר
פתרונות

1. (40 נק')

(א) (20 נק') נסמן ב e האדיש ב G. ישנם שלושה תנאים לבדוק.
לכל $x \in G$ ניתן לכתוב $x = exe^{-1}$ לכן $x \sim x$.
אם $x \sim y$ אז קיים $g \in G$ כך ש $x = gyg^{-1}$. נובע ש

$$y = g^{-1}xg = g^{-1}x(g^{-1})^{-1}$$

לכן $y \sim x$.
אם $x \sim y$ ו $y \sim z$ אזי קיימים $g, h \in G$ כך ש $x = gyg^{-1}$ ו $y = hzh^{-1}$. נקבל $x = g(hzh^{-1})g^{-1} = (gh)z(gh)^{-1}$ לכן $x \sim z$.
נובע שהייחס הנתון אכן יחס שקילות.

(ב) (20 נק') יהי $z \in Z(G)$. כעת, לכל $x \in G$ כך ש $x \sim z$ קיים $g \in G$ כך ש $x = gzg^{-1} = zgg^{-1} = z$. לכן האיבר היחיד של G ששקול ל z הוא z עצמו. לכן $[z] = \{x \in G \mid x \sim z\} = \{z\}$.

2. (60 נק')

(א) (20 נק') נ כתוב $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. לכל $aI \in J$ ו $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ מתקיים $AaIA^{-1} = aAA^{-1} = aI \in J$. נובע ש $AJA^{-1} \subseteq J$ לכל $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. לפי טענה, נובע ש J נורמלית ב G.

(ב) (20 נק') יהי $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ו $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. אזי

$$\begin{aligned}\det(CAC^{-1}) &= \det C \det A \det C^{-1} = \det A \det C \det C^{-1} \\ &= \det A \det(CC^{-1}) = \det A \det I = \det A = 1\end{aligned}$$

לכן $CAC^{-1} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. נובע ש $C(\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}))C^{-1} \subseteq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ לכל $C \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ ולכן $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ נורמלית ב $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(ג) (20 נק') הקבוצה $J \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ אינה ריקה כי הקבוצות $J,\ \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ אינן ריקות. יהי $a_1ID_1, a_2ID_2 \in J. \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ כאשר כל $a_iI \in J$ ו $D_i \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. כעת,

$$a_1ID_1a_2ID_2 = a_1a_2D_1D_2 = a_1a_2ID_1D_2 \in J \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$$

והקבוצה $J \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ סגורה ביחס לפעולה. אם $aID \in J \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ אז $a^{-1}ID^{-1}$ הופכי שלו כי לפי החישוב הקודם

$$a^{-1}ID^{-1}aID = a^{-1}aID^{-1}D = I.$$

נובע ש $J \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ תת חבורה של $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. יהי $aID \in J \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ ו $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. אזי

$$AaIDA^{-1} = aIADA^{-1} \in J \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

כי $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ **נורמלית ב** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ **לכן** $ADA^{-1} \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$. **נובע ש** $A(J \cdot \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}))A^{-1} \subseteq J \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ **לכל** $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ **ולכן** $J \cdot \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ **נורמלית ב** $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

שאלה: האם באופן כללי לכל חבורה G **עם תת חבורה** נורמלית N **מתקיים ש** $Z \cdot N$ **תת חבורה נורמלית של** G **כאשר** $Z = Z(G)$ המרכז של G?