מטלה מס' 6 אלגברה מודרנית
להגשה: עד יום ד' 9 בינואר
פתרונות

1. (40 נק')

(א) (20 נק') החבורה G סופית לכן הסדר של כל איבר $g \in G$ סופי. נסמן $\text{ord}(g) = k$. על פי טענה שראינו בקורס

$$\langle g \rangle = \{e, g, \ldots, g^{k-1}\}$$

כאשר e האדיש. בפרט, $k = |\langle g \rangle|$. לפי משפט לגרנז' הסדר של תת המרחב $\langle g \rangle$ מחלק את הסדר של G לכן k מחלק את n.

(ב) (20 נק') הסדר של החבורה S_4 הוא $4! = 24$. אבל כל איבר של S_4 הוא או מחזור מאורך $t \leq 4$ (ואז הסדר הוא t) או שהוא הרכבה של שני חילופים זרים (ואז הסדר הוא 2). נובע שאין איבר של S_4 מסדר 6, 8 או 12.

2. (30 נק')

(א) (10 נק') לפי שאלה 1 סעיף א הסדר של כל איבר של G מחלק את p. אבל p ראשוני לכן המחלקים שלו הם $1, p$ בלבד. הסדר של כל איבר חוץ מהאדיש הוא לפחות 2. נובע ש $\text{ord}(e) = 1$ ו $\text{ord}(g) = p$ לכל $g \neq e$.

(ב) (10 נק') יהי H תת חבורה של G. אזי הסדר של H מחלק את $|G| = p$. מכיוון ש p ראשוני, נובע שהסדר של H שווה 1 או p. נובע ש $H = \{e\}$ או $H = G$ ומצאנו שיש רק שני תתי חבורה של G.

(ג) (10 נק') יהי $a \in G$ כך ש $a \neq e$ כאשר e האדיש. אזי $\text{ord}(a) = p$ לפי סעיף א' לכן $|\langle a \rangle| = \text{ord}(a) = p$. מכיוון ש $|G| = p$, נובע ש $\langle a \rangle = G$ ולכן G ציקלית.
הערה: הוכחנו דרך אגב שכל איבר של G חוץ מהאדיש יוצר שלה.

3. (30 נק')

(א) (15 נק') נקח $G = S_3$. אז $|S_3| = 6$. לפי משפט לגרנז' הסדר של תת חבורה $H \neq G$ יכול להיות רק 1, 2 או 3. אם $|H| = 1$ אז $H = \{e\} = \langle e \rangle$. אם $|H| = 2$ או $|H| = 3$ אז הסדר של H מספר ראשוני ולפי שאלה 2 סעיף ג' H ציקלית.

4. (15 נק') נקח $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

אז $|G| = 4$ (G אינה ציקלית כי אין לה איבר מסדר 4.) לפי משפט לגרנז' הסדר של תת חבורה $H \neq G$ יכול להיות רק 1 או 2. אם $|H| = 1$ אז $H = \{(0,0)\} = \langle (0,0) \rangle$. אם $|H| = 2$ אז הסדר של H ראשוני ולפי שאלה 2 סעיף ג' H ציקלית.