מטלה מס' 5 אלגברה מודרנית
להגשה: עד יום ג' 1 בינואר
פתרונות

1. (א) (20 נק') יהי e האדיש. נציין ש $eg = ge$ לכל $g \in G$ לכן $e \in Z(G)$. נובע ש $Z(G)$ אינה ריקה. אם $z, w \in Z(G)$ אז לכל $g \in G$ מתקיים

$$(zw)g = z(wg) = z(gw) = (zg)w = (gz)w = g(zw)$$

ולכן $zw \in Z(G)$. כאן השתמשנו בכך ש $zg = gz, wg = gw$ כי $z, w \in Z(G)$. אחרון, יהי $z \in Z(G)$. אז לכל $g \in G$ מתקיים

$$zg = gz \implies g = z^{-1}gz \implies gz^{-1} = z^{-1}g$$

לכן $z^{-1} \in Z(G)$. נובע ש $Z(G)$ תת חבורה של G.

(ב) (20 נק') יהיו $z, w \in Z(G)$. אזי $zw = wz$ כי $z \in Z(G)$ ו $w \in G$. נובע ש $Z(G)$ אבלית.

(ג) (20 נק')

$$\begin{aligned} w \in S &\iff w^{-1}xw = x \quad : x \in G \text{ לכל} \\ &\iff xw = wx \quad : x \in G \text{ לכל} \\ &\iff w \in Z(G). \end{aligned}$$

נובע כי $S = Z(G)$.

2. (א) (20 נק') אם G אבלית, יהיה $z \in G$, אז לכל $g \in G$ מתקיים $zg = gz$ לכן $z \in Z(G)$. הוכחנו ש $Z(G) \subseteq G$ לכן $Z(G) = G$.

(ב) (20 נק') נקח $G = S_3$ ונראה ש $Z(S_3) = \{e\}$. קודם כל,

$$(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3)$$

ו

$$(2\ 3)(1\ 2) = (3\ 2)(2\ 1) = (3\ 2\ 1) = (1\ 3\ 2)$$

לכן $(1\ 2)(2\ 3) \neq (2\ 3)(1\ 2)$. נובע ש $(1\ 2), (2\ 3) \notin Z(S_3)$. באופן דומה, ניתן לראות ש $(1\ 3)(3\ 2) \neq (3\ 2)(1\ 3)$ לכן $(1\ 3) \notin Z(S_3)$. כעת,

$$(1\ 2\ 3)(2\ 3) = (1\ 2)(2\ 3)(2\ 3) = (1\ 2)$$

ו

$$(2\ 3)(1\ 2\ 3) = (2\ 3)(2\ 3\ 1) = (2\ 3)(2\ 3)(3\ 1) = (3\ 1)$$

לכן $(1\ 2\ 3)(2\ 3) \neq (2\ 3)(1\ 2\ 3)$ ונובע ש $(1\ 2\ 3) \notin Z(S_3)$. באופן דומה, ניתן לראות ש $(1\ 3\ 2)(3\ 2) \neq (3\ 2)(1\ 3\ 2)$ לכן $(1\ 3\ 2) \notin Z(S_3)$. בדקנו את כל האיברים של S_3 חוץ מהאדיש. לכן $Z(S_3) = \{e\}$.

(ג) i. (10 נק') תהי

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})).$$

אז מתקיים

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow &\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow &\, c = 0, a = d \end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow &\begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow &\, b = 0, a = d. \end{aligned}$$

קיבלנו ש A בצורה של

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aI$$

כלומר A מטריצה סקלרית.

ii. (10 נק') בסעיף הקודם ראינו שכל מטריצה ב $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ היא מטריצה סקלרית. מצד שני, כל מטריצה סקלרית $A = aI$ מקיימת $AB = aIB = aB$ ו $BA = BaI = aB$ לכל $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ לכן $A \in Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$. נובע ש

$$Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) = \{aI \mid a \in \mathbb{R}\}.$$