מטלה מס' 1 אלגברה מודרנית
להגשה: עד יום ג' 27 בנובמבר
פתרונות

1. (60 נק')

(א) (10 נק') לכל $a \in \mathbb{N}$ מתקיים $a = 1 \cdot a$ לכן $a|a$.

(ב) (10 נק') יהיו $a, b \in \mathbb{N}$ כך ש $a|b$ וגם $b|a$. מכיוון ש $a|b$, קיים $t \in \mathbb{N}$ כך ש $b = ta$. נובע ש $b \geq a$. באופן דומה, מכיוון ש $b|a$, נובע ש $b \leq a$. קיבלנו ש $a \leq b \leq a$ ולכן $a = b$.

(ג) (10 נק') יהיו $a, b, c \in \mathbb{N}$ כך ש $a|b$ וגם $b|c$. אז קיימים $s, t \in \mathbb{N}$ כך ש $b = sa$ ו $c = tb$. נציב ונקבל $c = sta$ לכן $a|c$.

2. (10 נק')

(א) (10 נק') $x^6 \equiv r^6 \mod 7$ כאשר r השארית של x מודולו 7. מצד שני, $7 \not| x$ לכן השארית אינה 0. נבדוק את האפשרויות:

r	$r^6 \mod 7$
1	$1 \equiv 1$
2	$64 \equiv 1$
3	$3^6 \equiv 27^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1$
4	$4^6 \equiv (-3)^6 \equiv 3^6 \equiv 1$
5	$5^6 \equiv (-2)^6 \equiv 2^6 \equiv 1$
6	$6^6 \equiv (-1)^6 \equiv 1$

ראינו ש $r^6 \equiv 1 \mod 7$ לכל $r \in \{1,2,3,4,5,6\}$. נובע ש $x^6 \equiv 1 \mod 7$ לכל x כך ש $7 \not| x$.

(ב) (50 נק') נשים לב שעבור כל פתרון בשלמים ניתן (במידת הצורך) לקחת $x = -x$ או $y = -y$ או $z = -z$ על מנת לקבל פתרון כאשר כל שלושת המספרים שייכים ל $\mathbb{N} \cup \{0\}$. לכן, מעתה והלאה נניח ש $x, y, z \geq 0$.

נסמן $S = \{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}) : x^6 = 7(y^6 + z^6)\}$. נניח ש S אינה ריקה. לפי עקרון הסדר הטוב, קיים איבר מינימלי x_0 ב S. בהתאם, קיימים $y_0, z_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש $x_0^6 = 7(y_0^6 + z_0^6)$. נובע ש $7|x_0^6$. מכיוון ש 7 ראשוני, נובע ש $7|x_0$. לכן קיים $x_1 \in \mathbb{N}$ כך ש $x_0 = 7x_0$. נציב ונקבל $7^6 x_1^6 = 7(y_0^6 + z_0^6)$. נובע ש $7^5 x_1^6 = y_0^6 + z_0^6$, בפרט, $y_0^6 + z_0^6 \equiv 0 \mod 7$. כעת, לפי סעיף א' אם $y_0 \not\equiv 0$ או $z_0 \not\equiv 0 \mod 7$ אז $y_0^6 + z_0^6 \equiv 1$ או $y_0^6 + z_0^6 \equiv 2 \mod 7$. לכן בהכרח $y_0 \equiv z_0 \equiv 0 \mod 7$. לכן קיימים $y_1, z_1 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש $y_0 = 7y_1,\ z_0 = 7z_1$. נציב ונקבל

$$7^6 x_1^6 = 7(7^6 y_1^6 + 7^6 z_1^6) \iff x_1^6 = 7(y_1^6 + z_1^6).$$

נובע ש $x_1 \in S$ אבל $x_1 = \frac{1}{7}x_0 < x_0$ בסתירה לכך ש x_0 מינימלי ב S. המסקנה היא ש $S = \emptyset$. לכן מתקבל פתרון רק כאשר $x = 0 \implies 7(y^6 + z^6) = 0 \implies y = z = 0$.