

מטלה מס' 10 אלגברה מודרנית להגשה: עד יום ג' 5 בפבואר

1. (30 נק') יהי $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ שדה ו $(\mathbb{R}^{2 \times 2}, +, \cdot)$ חוג עם הפעולות הרגילות.

נגדיר פונקציה $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ על ידי $\varphi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

(א) (20 נק') הראו ש φ הומומורפיזם של חוגים.

(ב) (20 נק') הראו ש φ חד-חד-ערכית.

(ג) (20 נק') הראו שתת החוג $\text{Im}(\varphi)$ של $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ הוא שדה.
הערה: מומלץ להשתמש ב φ !

(ד) (20 נק') הראו שכל מטריצה $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \text{Im}(\varphi)$ מתבטא

בצורה של $A = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

הערה: שוב מומלץ להשתמש ב φ !

(ה) (20 נק') מצאו מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ כך ש $A^2 = -I$.

הערה: שוב מומלץ להשתמש ב φ !

(ו) (בנוסף, 10 נק') יהי $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ פולינום עם מקדמים ממשיים כך

ש $f(x)$ אינו פולינום האפס. הוכיחו שקיימת מטריצה $A \in \text{Im}(\varphi)$ כך ש $f(A) = 0$.

הערות:

i. בהצבה של A בפולינום $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ נפרש

את האיבר הקבוע כ $a_0 x^0$. ההצבה תיתן $a_0 A^0 = a_0 I$.

ii. שוב מומלץ להשתמש ב φ !

הוראות:

- יש להגיש את התרגיל **בזוגות**. מותר להגיש לבד.
- חובה לכתוב את מספרי ת.ז. של שני הסטודנטים.
- ניתן לכתוב פתרונות בכל צבע פרט לאדום.
- יש להגיש את העבודה למרצה בקורס (מרק ברמן). ישנן 2 אופציות:
 - להגיש לו ישירות (ידנית)
 - לשים את העבודה בתא דואר שלו (565) שנמצא על יד חדר EM429
- אין להגיש במייל אלקטרוני.
- יש להקפיד על מועד ההגשה. עבודה שמוגשת באיחור ללא סיבה מוצדקת ובלי קבלת אישור מראש לא בהכרח תיבדק.