

## מטלה מס' 9 אלגברה מודרנית להגשה: עד יום ג' 29 בינואר

1. (30 נק') יהי  $\phi : G \rightarrow K$  הומומורפיזם מחבורה  $G$  לחבורה  $K$ .
  - (א) (20 נק') הראו ש  $\phi$  חד-חד-ערכי אם ורק אם  $\ker \phi = \{e\}$  כאשר  $e$  האדיש של  $G$ .
  - (ב) (10 נק') הוכיחו שאם  $G$  ציקלית אז  $\text{Im}(\phi)$  ציקלית.
2. (30 נק') נגדיר פונקציה  $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$  על ידי  $\phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  כאשר  $(\mathbb{Z}, +)$  ו  $(\text{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$  חבורות.
  - (א) (5 נק') הראו ש  $\phi$  הומומורפיזם.
  - (ב) (5 נק') הראו ש  $\phi$  חד-חד-ערכי.
  - (ג) (10 נק') הראו ש  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z} \right\}$  תת חבורה ציקלית של  $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ .
  - (ד) (10 נק') הראו שהחבורה  $\mathbb{Z}$  איזומורפית לחבורה  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{Z} \right\}$ .
3. (40 נק') תהינה  $(\text{GL}(\mathbb{Q}), \cdot)$  ו  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  חבורות כאשר  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ . נגדיר פונקציה  $\phi : \text{GL}_2(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}^*$  על ידי  $\phi(A) = \det A$ .
  - (א) (5 נק') הראו ש  $\phi$  הומומורפיזם.
  - (ב) (5 נק') הראו ש  $\phi$  על.
  - (ג) (20 נק') הוכיחו ש  $\mathbb{Q}^*$  אינה ציקלית.

**הצעה:** הניחו ש  $\mathbb{Q}^* = \langle a \rangle$  והראו שקיים ראשוני  $p$  כך ש  $\frac{1}{p} \notin \langle a \rangle$ .

  - (ד) (10 נק') הוכיחו ש  $\text{GL}_2(\mathbb{Q})$  אינה ציקלית.

### הוראות:

- יש להגיש את התרגיל **בזוגות**. מותר להגיש לבד.
- חובה לכתוב את מספרי ת.ז. של שני הסטודנטים.
- ניתן לכתוב פתרונות בכל צבע פרט לאדום.
- יש להגיש את העבודה למרצה בקורס (מרק ברמן). ישנן 2 אופציות:
  - להגיש לו ישירות (ידנית)
  - לשים את העבודה בתא דואר שלו (565) שנמצא על יד חדר EM429
- אין להגיש במייל אלקטרוני.
- יש להקפיד על מועד ההגשה. עבודה שמוגשת באיחור ללא סיבה מוצדקת ובלי קבלת אישור מראש לא בהכרח תיבדק.