מטלה מס' 5 אלגברה מודרנית
להגשה: עד יום ג' 1 בינואר

מטלה זו מבוססת במושג הבא. תהי G חבורה. **המרכז** של G היא תת קבוצה של G המוגדרת על ידי

$$Z(G) = \{g \in G \mid gy = yg \quad \text{לכל } y \in G\}.$$

1. תהי G חבורה.
   (א) (20 נק') הוכיחו שהמרכז $Z(G)$ הוא תת חבורה של G.
   (ב) (20 נק') הוכיחו כי $Z(G)$ אבלית.
   (ג) (20 נק') נגדיר תת קבוצה של G על ידי
   $$S = \{h \in G \mid h^{-1}xh = x \quad \text{לכל } x \in G\}.$$
   הוכיחו ש $S = Z(G)$.

2. (א) (20 נק') הוכיחו שאם חבורה G אבלית אז $Z(G) = G$.
   (ב) (20 נק') תנו דוגמא של חבורה G כך ש $Z(G) = \{e\}$ כאשר e האדיש של G.
   (ג) נתבונן בחבורה $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \cdot)$ של מטריצות הפיכות מסדר 2×2.
   i. (10 נק') תהי $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מטריצה ששייכת למרכז $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ של $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. השתמשו בכך ש $A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}A$ ו $A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}A$ על מנת להראות ש A בהכרח מטריצה סקלרית, כלומר היא כפולה של מטריצת היחידה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   ii. (10 נק') הוכיחו ש $Z(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$.

הוראות:

- יש להגיש את התרגיל **בזוגות**. מותר להגיש לבד.
- חובה לכתוב את מספרי ת.ז. של שני הסטודנטים.
- ניתן לכתוב פתרונות בכל צבע פרט לאדום.
- יש להגיש את העבודה למרצה בקורס (מרק ברמן). ישנן 2 אופציות:
  – להגיש לו ישירות (ידנית)
  – לשים את העבודה בתא דואר שלו (565) שנמצא על יד חדר EM429
- **אין** להגיש במייל אלקטרוני.
- יש להקפיד על מועד ההגשה. עבודה שמוגשת באיחור ללא סיבה מוצדקת ובלי קבלת אישור מראש לא בהכרח תיבדק.