

## מטלה מס' 4 אלגברה מודרנית להגשה: עד יום ג' 25 בדצמבר

1. (40 נק') תהי  $G$  חבורה ציקלית ואינסופית. הוכיחו שכל תת חבורה לא טריוויאלית  $H \neq \{e\}$  של  $G$  גם ציקלית ואינסופית.

2. (60 נק') נתבונן במכפלה ישירה  $G = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  כאשר  $m, n \in \mathbb{N}$  והחבורות  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  מוגדרות ביחס חיבור מודולו  $m, n$  בהתאמה.

(א) (30 נק') אם  $\gcd(m, n) = 1$ , הוכיחו ש  $G$  ציקלית ומצאו יוצר של  $G$ .

(ב) (20 נק') אם  $\gcd(m, n) \neq 1$ , הוכיחו שלכל איבר  $(a, b)$  של  $G$  מתקיים  $t(a, b) = (0, 0)$  כאשר  $t = \text{lcm}(m, n)$ , הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של  $m$  ו  $n$ .

(ג) (10 נק') אם  $\gcd(m, n) \neq 1$ , הוכיחו ש  $G$  אינה ציקלית. **הזהרה:** בסעיף זה, לא מספיק לקחת מקרה ספציפי של  $m, n$  אלא שצריך להוכיח את הטענה **לכל**  $m, n$  כך ש  $\gcd(m, n) \neq 1$ .

3. (בנוס 50 נק')

ישנם  $r \in \mathbb{N}$  אנשים בחדר. אמרו להם שעוד 5 דקות יזמינו אותם לעמוד בתור, כל אחד יסתכל קמידה ויראה רק את האנשים שעומדים לפניו. אחר מכן ישמו את הראש של כל אחד כובע בצבע מסויים. ישנם  $n$  צבעים אפשריים. אמרו לאנשים מהם כל הצבעים. כל אחד צריך להגיד מה הצבע של הכובע שמעל ראשו. מתחילים עם מי שעומד הכי אחורה (ורואה את כל האנשים ואת כל הכובעים לפניו). אחר כך, מי שעומד לפניו צריך להגיד, וכו', עד שבסוף מי שעומד בתחילת התור (הכי קדימה) צריך להגיד.

תיארו הסטרטגיה שמפתיחה שכל אחד מהאנשים חוץ ממי שעומד הכי אחורה יצליחו להגיד את הצבע של הכובע שלו.

### הוראות:

- יש להגיש את התרגיל **בזוגות**. מותר להגיש לבד.
- חובה לכתוב את מספרי ת.ז. של שני הסטודנטים.
- ניתן לכתוב פתרונות בכל צבע פרט לאדום.
- יש להגיש את העבודה למרצה בקורס (מרק ברמן). ישנן 2 אופציות:

– להגיש לו ישירות (ידנית)

– לשים את העבודה בתא דואר שלו (565) שנמצא על יד חדר

EM429

- **אין** להגיש במייל אלקטרוני.
- יש להקפיד על מועד ההגשה. עבודה שמוגשת באיחור ללא סיבה מוצדקת ובלי קבלת אישור מראש לא בהכרח תיבדק.