סילבוס מפורט של קורס אלגברה 2 מח' - 11020

סמסטר אביב – תשע"ג

3 ש"ש הרצאה, 2 ש"ש תרגול, 14 שבועות

מרצים:

מרק ברמן e-mail: mark.n.berman@gmail.com

ויקטור אוסטרובסקי e-mail:vostrovs@braude.ac.il

ילנה פוגרבניאק e-mail: elena@techunix.ac.il

לביא קרפ (אחראי) e-mail: karp@braude.ac.il, טל. 04−9901801

מתרגלים:

ריטה בן עזר e-mail: r_benazar@walla.com

מרק ברמן e-mail: mark.n.berman@gmail.com

ילנה פוגרבניאק e-mail: elena@techunix.ac.il

פליקס קרדמן e-mail: felixkerdman@gmail.com

דרישות הקורס ורקע נדרש: אלגברה מח' 11102.

תיאור הקורס ומטרותיו: הקניית ידע בחישובי מטריצות, שימוש במטריצות והבנתם. נושאים אלו הם אבני היסוד של ההנדסה המודרנית.

אינטרנט ותקשורת אלקטרונית: חוברת תרגילים מעודכנת נמצאת באתר הקורס. החוברת בנויה ממספר גיליונות ולפי נושאים. חלק מסיכומי ההרצאות נמצא באתר הקורס.

בחינות ומדיניות ציונים: מבחן אמצע 25% מגן, מבחן סופי 75%. מועד מבחן אמצע: ?? .

תכנית מפורטת של הקורס

הסילבוס המפורט מהווה תכנית ראשונית של הקורס. במהלך הקורס יתכנו שינויים מסוימים. הסילבוס מורכב משישה חלקים ראשיים.

1. **מכפלה סקלרית ב- $\mathbb{R}^n$ ואורתוגונליות (7 ש"ש)**

א. כפל מטריצות: נסמן ב $A = [\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n]$ מטריצה $m \times n$, כאשר הווקטורים $\{\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_n\} \subset \mathbb{R}^m$ הן העמודות שלה ו $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ וקטור ב- $\mathbb{R}^n$.

i. כפל מטריצה A בווקטור $\mathbf{x}$: $A\mathbf{x}=x_1\mathbf{a}_1+\cdots+x_n\mathbf{a}_n$ זהו הצירוף לינארי של העמודות של המטריצה A.

ii. הכפל AB ניתן על ידי $AB=[A\mathbf{b}_1,...,A\mathbf{b}_k]$ כאשר B היא מטריצה $n\times k$.

iii. כפל לפי "עמודה-שורה": $AB=\mathbf{a}_1\mathbf{Row}_1(B)+\cdots+\mathbf{a}_n\mathbf{Row}_n(B)$, כאשר $B=\begin{bmatrix}\mathbf{Row}_1(B)\\ \vdots\\ \mathbf{Row}_n(B)\end{bmatrix}$.

ב. כתיבת מכפלה סקלרית בצורה של $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ ו $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, הגדרת נורמה של וקטור.

ג. אי-שיוון קושי-שוורץ-בוניאקובסקי, הגדרת זווית בין שני וקטורים ב- $\mathbb{R}^n$. הגדרת אורתוגונליות של שני וקטורים. משפט אי-שוויון המשולש ופיטגוראס.

ד. הגדרה של קבוצה אורתוגונלית ואורתונורמלית. משפט : אם קבוצת וקטורים אורתוגונלית אז היא בלתי תלויה לינארית. בסיס אורתונורמלי ומציאת קואורדינטות של וקטור בבסיס אורתונורמלי, מקדמי פורייה.

ה. **מטריצות אורתוגונליות:** הגדרה: מטריצה ריבועית A נקראת אורתוגונלית אם $A^TA=AA^T=I$. משפט: התנאים הבאים שקולים: (i) $A^TA=AA^T=I$; (ii) עמודות של A הן בסיס אורתונורמלי; (iii) שורות של A הן בסיס אורתונורמלי; (iv) A שומרת מכפלה סקלרית; (v) A שומרת מרחק (נורמה). מסקנה: מטריצה A אורתוגונלית אא"ם A מעתיקה בסיס אורתונורמלי לבסיס אורתונורמלי אחר.

ו. מטריצות סיבוב במישור כדוגמה של מטריצות אורתוגונליות, מטריצה A 2×2 אורתוגונלית, היא מטריצת סיבוב אא"ם $\det(A)=1$.

ז. **תהליך גרהם-שמידט:** משפט: לכל קבוצת וקטורים $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m\}\subset\mathbb{R}^n$ בת"ל, קיימת קבוצת וקטורים $\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_m\}$ אורתוגונלית כך ש $\mathrm{sp}\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m\}=\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_m\}$. (הוכחה באמצעות תהליך גרהם-שמידט). מסקנה: לכל תת-מרחב של $\mathbb{R}^n$ קיים בסיס אורתוגונלי (אורתונורמלי).

2. **הטלה אורתוגונלית ב-$\mathbb{R}^n$, שיטת הריבועיים המזעריים, מטריצות הטלה, שיקוף וסיבוב, והופכי-מוכל (10 ש"ש)**

א. **משלים אורתוגונלי:** תזכורת על סכום וסכום ישר. הגדרת המשלים האורתוגונלי ב $\mathbb{R}^n$: $U^\perp$ משלים אורתוגונלי של תת מרחב U, אם $\mathbb{R}^n=U\oplus U^\perp$ ו $U\perp U^\perp$.

ב. **היטל אורתוגונלי:** הגדרה: וקטור $\mathbf{p}$ היטל של $\mathbf{b}$ על תת-מרחב U, אם (i) $\mathbf{b}\in U$, (ii) $(\mathbf{b}-\mathbf{p})\perp U$. משפט: ההיטל האורתוגונלי תמיד קיים ויחיד. חישוב ההיטל

באמצעות מקדמיי פורייה והמערכת הנורמלית. משפט (תכונות המערכת הנורמלית): (i) כל פתרון של המערכת הרגילה הוא גם פתרון של המערכת הנורמלית; (ii) למערכת הנורמלית תמיד קיים פתרון; (iii) $\dim(\mathrm{Nul})(A^TA) = \dim(\mathrm{Nul})(A)$; (iv) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^TA)$.

ג. **פתרון של מערכת משוואות לינאריות במובן של הקירוב הטוב ביותר:** משפט: וקטור $\mathbf{p}$ היטל של $\mathbf{b}$ על U אא"ם $\|\mathbf{p}-\mathbf{b}\| = \min_{\mathbf{u}\in U}\|\mathbf{u}-\mathbf{b}\|$. פתרון של מערכת משוואות לינאריות במובן של הקירוב הטוב ביותר: $\|A\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{b}\| \leq \|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|$ לכל $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$. שיטת הריבועים המזעריים: מציאת הישר שמקרב באופן הטוב ביותר מספר נקודות במישור ונוסחה לקירוב על ידי פולינום ריבועי.

ד. מטריצה של הטלה אורתוגונלית על תת-מרחב שנפרש ע"י וקטור אחד $\mathbf{a}$ היא $\frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$. הגדרת מטריצת הטלה: $P^2 = P$ ו $P^T = P$. נוסחה למטריצת הטלה על $\mathrm{Col(A)}$ כאשר עמודות של A בת"ל. היטל על משלים אורתוגונלי, הגדרת היפר מישור ומטריצת הטלה על היפר מישור עם נורמל $\mathbf{N}$: $P = I - \frac{\mathbf{N}\mathbf{N}^T}{\mathbf{N}^T\mathbf{N}}$. הגדרת מטריצת שיקוף: $R^T = R$ ו $R^2 = I$ והקשרביין שיקופים והטלות. מטריצות של שיקוף כלפי היפר מישור עם נורמל $\mathbf{N}$, $R = I - 2\frac{\mathbf{N}\mathbf{N}^T}{\mathbf{N}^T\mathbf{N}}$ דיון בערכים ווקטורים עצמיים של הטלות ושיקופים.

ה. **מטריצות סיבוב ב $\mathbb{R}^3$:** השוואה ביין סיבוב במרחב ובמישור (ציר הסיבוב), נוסחה למטריצת סיבוב במרחב:

$$R = \cos\alpha\left(\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{b}\mathbf{b}^T\right) + \sin\alpha\left(\mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{a}\mathbf{b}^T\right) + \mathbf{c}\mathbf{c}^T,$$

כאשר $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ וקטורים אורתונורמליים כך ש $\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}$ פורשים את מישור הסיבוב ו $\mathbf{c}$ זה ציר הסיבוב.

ו. **המשפט היסודי של האלגברה הלינארית:**

$$(\mathrm{Nul}(A))^{\perp} = \mathrm{Col(A^T)},\ \ (\mathrm{Col(A)})^{\perp} = \mathrm{Nul(A^T)}.$$

ז. **מטריצה הפוכה מוכללת (Moore-Penrose Inverse):** הסבר של ההופכי-המוכלל באמצעות המשפט היסודי של האלגברה הלינארית. הגדרה: מטריצה $A^{\dagger}$ היא הופכי מוכלל של A אם: $AA^{\dagger}$ היטל על $\mathrm{Col(A)}$ ו $A^{\dagger}A$ היטל על $\mathrm{Col(A^T)}$. נוסחה להופכי מוכלל כאשר $\mathrm{Col(A)}$ בת"ל. פירוק מטריצה FR (full rank decomposition) של מטריצה וחישוב הפירוק במקרים פשוטים. נוסחה להופכי מוכלל באמצעות פירוק FR. יחידות של מטריצה הפוכה מוכללת. מטריצה הפוכה מוכללת ופתרון של מערכות משוואות: $\mathbf{x}^{\dagger} = A^{\dagger}\mathbf{b}$ הפתרון של המערכת הנורמלית עם הנורמה הקצרה ביותר.

3. **מרחבי מכפלה פנימית ממשית** (5 ש"ש)

א. הגדרה ודוגמאות, מרחבי מטריצות ($\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(B^T)$), מרחבי פונקציות ופולינומים. נורמה ואורתוגונליות במרחבי מכפלה פנימית. אי-שוויון המשולש, אי שוויון המשולש ומשפט פיתגוראס.

ב. הקבלות למכפלה סקלרית: בסיס אורתונורמלי, מקדמי פורייה ותהליך גרהם -שמידט.

ג. **הטלות אורתוגונליות:** משלים אורתוגונלי $U^\perp = \{\mathbf{w} : \langle \mathbf{w},\mathbf{u}\rangle = 0 \ \forall \mathbf{u} \in u\}$, קיום המשלים האורתוגונלי. הגדרת ההיטל (כמו ב $\mathbb{R}^n$) משפט על המרחק הקצר בהיתר. חישוב ההיטל באמצעות בסיס אורתונורמלי והמערכת הנורמלית. דוגמאות, למשל קירוב של פונקציות ע"י פולינומים בעזרת היטל.

4. **מטריצות הרמטיות ויוניטריות** (5 ש"ש)

א. הגדרת מכפלה פנימית (סטנדרטית) ב $\mathbb{C}^n$. סימון $A^H = (\bar{A})^T$ ו $\langle \mathbf{z},\mathbf{w}\rangle = \mathbf{w}^T\mathbf{z}$.

ב. בסיס אורתונורמלי והקשר למטריצות יונטריות הגדרה של מטריצה יוניטרית: זאת מטריצה ריבועית כך ש $U^HU = UU^H = I$. משפט שמקביל למטריצות אורתוגונליות. <u>משפט:</u> הטענות הבאות שקולות: (i) מטריצה U יוניטרית; (ii) עמודות של U בסיס אורתונורמלי; (iii) שורות של U בסיס אורתונורמלי; (iv) U שומרת מכפלה פנימית; (v) U שומרת נורמה. הגדרת מטריצות הרמיטיות $A^H = A$ ואנטי הרמיטיות.

ג. **תכונות ספקטרליות (של ערכים ווקטורים עצמיים) של מטריצות הרמטיות ויוניטריות:** טענות: ערכים עצמיים של מטריצות הרמיטיות הם ממשיים; ערכים עצמיים של מטריצות יונטריות נמצאים על מעגל היחידה; וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים של מטריצות הרמיטיות ויונטריות ניצבים זה לזה.

ד. **המשפט הספקטרלי:** ניסוח בשלוש צורות שקולות: (i) קיים ליכסון יונטרי; (ii) קיים בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{C}^n$ של וקטורים עצמיים של מטריצה A; (iii) פירוק ספקטרלי: $A = \lambda_1\mathbf{v}_1\mathbf{v}^T + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n\mathbf{v}^T$. משמעות גאומטרית של הפירוק הספקטרלי. חישובי חזקות של מטריצות סימטריות.

5. **פירוק SVD ויישומיו** (6 ש"ש)

א. <u>הצגת המשפט:</u> לכל מטריצה A, $m \times n$ מדרגה r קיימים: (i) $\{\hat{\mathbf{v}}_1,\ldots,\hat{\mathbf{v}}_r\}$ וקטורים אורתונורמליים ב $\mathbb{R}^n$; (ii) $\{\hat{\mathbf{u}}_1,\ldots,\hat{\mathbf{u}}_r\}$ וקטורים אורתונורמליים ב $\mathbb{R}^m$; (iii) ערכים סינגולריים $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ כך ש $A = \sigma_1\hat{\mathbf{u}}_1\hat{\mathbf{v}}_1^T + \ldots + \sigma_r\hat{\mathbf{u}}_r\hat{\mathbf{v}}_r^T$.

ב. **הוכחת המשפט באמצעות תכונות ספקטרליות של המטריצות AA^T ו A^TA:** טענות: למטריצות AA^T ו A^TA ערכים עצמיים אי-שליליים ומספר הערכים העצמיים החיוביים זהה לדרגת המטריצה; אם $\mathbf{v}$ וקטור עצמי של A^TA עם ערך עצמי חיובי, אז $\mathbf{u} = A\mathbf{v}$ וקטור עצמי של AA^T עם אותו ערך עצמי; כנ"ל עם חלופי תפקידים ביין A ו A^T; מסקנה: למטריצות A^TA ו AA^T אותם ערכים עצמיים חיוביים. תכונות ספקטרליות של מטריצה הגדרת הערכים הסינגולריים. הטענה: אם $\{\hat{\mathbf{v}}_1, \dots, \hat{\mathbf{v}}_r\}$ וקטורים עצמיים אורתונורמליים של A^TA, אז גם $\{\frac{1}{\sigma_1}A\hat{\mathbf{v}}_1, \dots, \frac{1}{\sigma_r}A\hat{\mathbf{v}}_r\}$ אורתונורמליים. השלמת ההוכחה של פירוק SVD באמצעות כפל מטריצות.

ג. חישוב פירוק SVD עם משמעיות גאומטריות.

ד. **קירוב מטריצות:** טענה: המטריצות $\{\hat{\mathbf{u}}_i\hat{\mathbf{v}}_j^T\}$ אורתונורמליות במכפלה הפנימית $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(B^TA)$. בהסתמך על הטענה חישוב הנורמה של מטריצה והמטריצה המקורבת באמצעות הערכים הסינגולריים. יישומים לעיבוד תמונה.

ה. חישוב של מטריצה הפוכה מוכללת באמצעות פירוק SVD. באמצעות פירוק SVD מתקבל ש $AA^\dagger$ היטל על $\mathrm{Col(A)}$ ו $A^\dagger A$ היטל על $\mathrm{Col(A^T)}$.

ו. תמונת ספרת היחידה: הצגה של אליפסואידים בבסיס אורתונורמלי, תמונת ספרת היחידה באמצעות פירוק SVD וכאשר עמודות של A בת"ל.

6. **תבניות ריבועיות** (6 ש"ש)

א. הגדרה, דוגמאות וייצוג תבנית ריבועית על ידי מטריצה סימטרית.

ב. הגדרת המושג תבנית ומטריצה סימטרית חיובית לחלוטין: מטריצה סימטרית A או תבנית ריבועית חיובית לחלוטין אם $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} > 0$ לכל $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, ושאר ההגדרות המקבילות.

ג. שינוי משתנים לינארי בתבנית ריבועית $\mathbf{x} = M\mathbf{y}$ ושינוי משתנים אורתוגונלי זה כאשר M מטריצה אורתוגונלית. משפט: התבנית $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}$ חיובית לחלוטין (אי-שלילית) אא"ם כל הערכים העצמיים של A חיוביים (אי-שליליים).

ד. תנאים הכרחיים, אך לא מספיקים, כדי שתבנית תהיה חיובית לחלוטין: (i) $\det(A) > 0$; (ii) המקדם $a_{ii} > 0$; (iii) $a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 > 0$ לכל $i \neq j$.

ה. כתיבת תבנית ריבועית ללא איברים מעורבים בשיטת Lagrange (השלמה ריבועית): דוגמאות עם תבניות עם שניים ושלושה משתנים. חישוב המטריצה M של שינוי המשתנים.

ו. אפיון תבניות ריבועיות באמצעות דטרמיננטות חלקיות: משפט: אם $\Delta_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$, אז קיים שינוי משתנים $\mathbf{x} = M\mathbf{y}$ כך שבמשתנים החדשים התבנית ניתנת

על ידי $\frac{1}{\Delta_1}y_1^2+\frac{\Delta_1}{\Delta_2}y_2^2+\cdots+\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}y_n^2$. מסקנות של המשפט.

ז. סימונית (Signature): הגדרת הסימונית ומשפט התמדה של סילבסטר: הסמינות אינה תלויה בשיטה שבה כתובים תבנית ריבועית ללא אברים מעורבים.

ח. אופטימיזציה: דיון במנת ראילי $\frac{\mathbf{x}^TA\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$, ובאי-שוויון $\lambda_n \le \frac{\mathbf{x}^TA\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2} \le \lambda_1$, כאשר λ_1 הערך העצמי הגדול ביותר ו λ_n הקטן ביותר. מקסימום ומינימום עם אילוצים ריבועיים.

ט. יישומים: אפיון של שניוניות ריבועיות $\mathbf{x}^TA\mathbf{x}=\mathrm{const.}$ (ללא גורמים לינאריים).

ספרות

ספרות עיקרית:

1. D.C. Lay, *Linear algebra and its applications*, Addison-Wesley, 2000.

2. 2. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, Thomson, 2006.

ספרות נוספת:

3. C. Meyer, *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Siam, Philadelphia, 2000.

4. א. ברמן, ב. קון, *אלגברה לינארית*, בק, 1999.

5. נעמי שקד–מונדרר, *אלגברה לינארית לתמידי מדעי הטבע*, שיעורים 4–6, האוניברסיטה הפתוחה 2004.

הערה: באתר הקורס המודל יש חומרי עזר נוספים. במידת הצורך נעדכן את האתר ונוסיף חומרים נוספים.