

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

מבחן מועד ב', תשע"ה – 27.7.2015

מרצה: לביא קרפ

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

מספר סטודנט:

הוראות לנבחן:

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שלוש שעות (180 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר, מלבד דף נוסחאות שמצורף.
- יש לכתוב את התשובות במחברת הבחינה.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש 6 שאלות (פותחות). משאלות 1-5 יש לבחור 4 שאלות. שאלה 6 חובה. נא לסמן בטבלה איזה שאלות בחרת לענות.

5	4	3	2	1	

אני בחרתי לענות על שאלות מספר (נא לסמן ב X):

- יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

סה"כ	6	5	4	3	2	1

שאלה 1 (22 נק') נתונה המשוואה

(1)
$$u_x - y^2 u_y = 0.$$

א. (10 נק') שרטט את הקווים האופייניים

ב. (8 נק') פתור את המשוואה (1) עם תנאי ההתחלה $u(0, y) = y^2$ עבור $y > 0$.

ג. (4 נק') האם ניתן לפתור את המשוואה (1) עם תנאי ההתחלה $u(x, x) = x$ לכל x ממשי?

שאלה 2 (22 נק') נתונה המשוואה

(2)
$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} = 0$$

א. מצא פתרון כללי.

ב. פתור את המשוואה (2) עם תנאי ההתחלה $u(x, 0) = e^x$ ו $u_y(x, 0) = x$.

שאלה 3 (22 נק') נתונה משוואת החום

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

א. (12 נק') חשב את הפתרון בתנאי ש $|f(x)| \leq M_1$ לכל x .

רמז: הצב $v(x, t) = e^{g(t)} u(x, t)$, כאשר g פונקציה של המשתנה t .

ב. (10 נק') הראה שאם $|f(x)| \leq M_2 e^x$ לכל x , אז $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$.

שאלה 4 (22 נק') נתונה בעיית שפה התחלה

$$(3) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sin(\omega t), & 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases},$$

כאשר $\omega > 0$.

א. (14 נק') חשב את הפתרון עבור $0 < \omega < c$.

ב. (8 נק') חשב את הפתרון עבור $\omega = c$.

שאלה 5 (22 נק') נתונה המשוואה

$$\begin{cases} u_{xx} - 4u_{tt} = F(x, t), & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4, & 2 < x \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}, \\ u_t(x, 0) = e^{-|x|}, & x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

א. (8 נק') חשב $u(3, 1)$, כאשר $F \equiv 0$.

ב. (8 נק') חשב $u(3, 1)$, כאשר $F(x, t) = e^{x+t}$.

ג. (6 נק') תעריך $\max_{0 \leq t \leq T} |u(x, t)|$, כאשר $F(x, t) = \sin(x + t)$.

שאלה 6 (12 נק') יהי $u(x, y)$ פתרון של בעיית דירכלה

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \{x^2 + y^2 < 4\} \\ u(\theta, 2) = |\sin(2\theta)|, & \{x^2 + y^2 = 4\} \end{cases}$$

א. (6 נק') חשב $u(0, 0)$.

ב. (6 נק') הראה ש $u(x, y) > \frac{1}{2}xy$ בעגול $\{x^2 + y^2 < 4\}$.