

מכללת אורט בראודה - המחלקה למתמטיקה
משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

מבחן מועד ב', תשע"ז – 4.8.2016

הוראות לנבחן:

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שלוש שעות (180 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר, מלבד דף נוסחאות שמצורף.
- יש לכתוב את התשובות במחברת הבחינה.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש 6 שאלות (פותחות). משאלות 1-5 יש לבחור 4 שאלות. שאלה 6 חובה.
- נא לסמן בטבלה איזה שאלות בחרת לענות.

5	4	3	2	1

אני בחרתי לענות על שאלות מספר (נא לסמן ב X):

- יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

סה"כ	6	5	4	3	2	1

שאלה 1 (20 נק') נתונה בעיית התחלה

$$(1) \quad \begin{cases} xu_x + yu_y = 0, & x, y > 0 \\ u(x, 1-x) = f(x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

א. (7 נק') מצא קווים אופייניים ושרטט אותם.

ב. (7 נק') חשב את הפתרון כאשר $f(x) = \sin x$.

ג. (6 נק') הראה שלכל פונקציה f שאינה זהה לקבוע הפתרון אינו רציף בראשית $(0, 0)$.

שאלה 2 (20 נק') נתונה בעיית התחלה משוואת הגל

$$(2) \quad \begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} .$$

$$g(x) = \begin{cases} \pi \cos(\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{כאשר} \quad f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

א. (10 נק') חשב את הפונקציה $u(x, 2)$ ושרטט את הגרף שלה.

ב. (5 נק') יהי

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2(x, t) + 4u_x^2(x, t)) dx.$$

אינטגרל האנרגיה. הסבר מדוע האינטגרל מתכנס לכל $t > 0$.

ג. (5 נק') חשב את $E(t)$.

שאלה 3 (20 נק') יהי $u(x, t)$ פתרון של משוואת החום

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} .$$

א. (8 נק') הראה ש $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

ב. (9 נק') חשב $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$ כאשר $f(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leq x < \infty \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

ג. (3 נק') הסבר במונחים הסתברותיים את המשמעות של סעיפים א' ו ב' ונמק את השוני ביין שני המקרים.

שאלה 4 (20 נק')

א. (12 נק') פתור את בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - 9u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 2 \sin 2x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

ב. (8 נק') פתור את בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - 9u_{xx} = \sin x \sin(3t), & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

הערה: השתמש בשיטת הפרדת המשתנים בכדי לפתור את בעיית שפה התחלה. בצע את כל השלבים מלבד חישוב הערכים ופונקציות עצמיות, שאותם ניתן לדלות מדפי הנוסחאות.

שאלה 5 (20 נק') נתונה בעיית ערכים עצמיים

$$\begin{cases} Y'' = -\lambda Y \\ Y'(0) + Y(0) = 0 \\ Y'(\frac{1}{2}) + 2Y(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$$

א. (8 נק') האם $\lambda = 0$ ערך עצמי? אם כן, מהי הפונקציה העצמית.

ב. (12 נק') האם קיים ערך עצמי שלילי?

שאלה 6 (20 נק')

א. (14 נק')

תהי u פונקציה בעלת נגזרות חלקיות מסדר שני שרציפות ב $B_R = \{x^2 + y^2 < R^2\}$.
נגדיר את הממוצע המעגלי

$$M(r) = \begin{cases} u(0,0), & r = 0 \\ \frac{1}{2\pi r} \int_{\{x^2+y^2=r^2\}} u ds, & 0 < r < R \end{cases}$$

כאשר ds זה מידדת (אלמנט) אורך הקשת. הראה ש

$$\frac{d}{dr} M(r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{\{x^2+y^2 \leq r^2\}} \Delta u dx dy, \quad 0 < r < R.$$

ב. (6 נק') בנוסף להנחות בסעיף א', נניח כי $\Delta u \geq 0$ בעיגול B_R . הראה שלכל $r > 0$

$$u(0,0) \leq \frac{1}{2\pi r} \int_{\{x^2+y^2=r^2\}} u ds.$$

רמז:

• האינטגרל בהצגה פרמטרית:

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\{x^2+y^2=r^2\}} u ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.$$

• משפט הדיוורגנס של גאוס: יהי Ω תחום עם שפה $\partial\Omega$, ונתון ש

$$\vec{F} \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \text{ אז}$$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy,$$

כאשר \hat{n} נורמל היחידה לשפה $\partial\Omega$ בכיוון החיצוני. עבור $\partial\Omega = \{x^2 + y^2 = r^2\}$,

$$\hat{n} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j} \text{ הוא הנורמל הוא}$$