מכללת אורט בראודה - המחלקה למתמטיקה

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

מבחן מועד ב', תשע"ו – 4.8.2016

פתרון!

שאלה 1 (20 נק') נתונה בעיית התחלה

$$\begin{cases} xu_x + yu_y = 0, & x, y > 0 \\ u(x, 1-x) = f(x), & 0 < x < 1 \end{cases} \quad \textbf{(1)}$$

א. (7 נק') מצא קווים אופייניים ושרטט אותם.

ב. (7 נק') חשב את הפתרון כאשר $f(x) = \sin x$.

ג. (6 נק') הראה שלכל פונקציה f שאינה זהה לקבוע הפתרון אינו רציף בראשית $(0,0)$.

תשובה

א. הקווים האופייניים נקבעים על ידי המשוואה $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{b} = \frac{y}{x}$, או

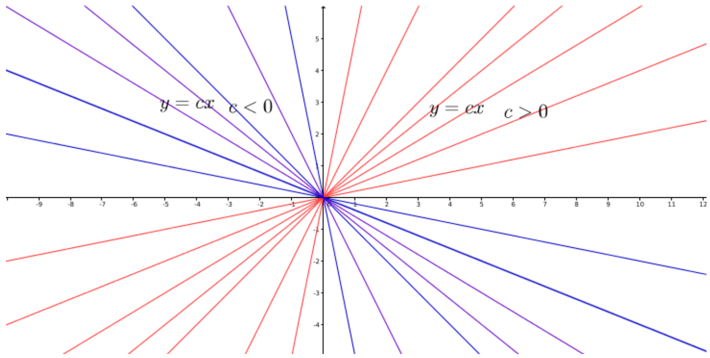
$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}.$$

פתרון המשוואה הוא $\ln|x| + c = \ln|y|$ או $y = cx$. כלומר, האופייניים הם ישרים שעוברים בראשית.

ב. מהקווים האופייניים $y = cx$, נקבל ש $c = \frac{y}{x}$. לפיכך, פתרון כללי $u(x,y) = F(c) = F(\frac{y}{x})$, כאשר $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$. נציב תנאי התחלה $u(x, 1-x) = F\left(\frac{1-x}{x}\right) = \sin(x)$. כעת נהפוך את המשוואה $t = \frac{1-x}{x}$, ולכן $x = \frac{1}{t+1}$

$$u(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right) = \sin\left(\frac{1}{\frac{y}{x}+1}\right) = \sin\left(\frac{x}{y+x}\right).$$

ג. הפתרון קבוע לאורך קווים אופייניים. מכיוון שכל האופייניים עוברים בראשית, אז הפתרון אינו יכול להיות רציף בנקודה זו, אלא אם כן f פונקציה קבועה.



איור 1: קווים אופייניים

שאלה 2 (20 נק') נתונה בעיית התחלה משוואת הגל

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \qquad (2)$$

כאשר $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$ ו $g(x) = \begin{cases} \pi\cos(\pi x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$.

א. (10 נק') חשב את הפונקציה $u(x,2)$ ושרטט את הגרף שלה.

ב. (5 נק') יהי

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2(x,t) + 4u_x^2(x,t)\right)dx.$$

אינטגרל האנרגיה. הסבר מדוע האינטגרל מתכנס לכל $t > 0$.

ג. (5 נק') חשב את $E(t)$.

תשובה

א. מכיון ש f ו g הן אפס מחוץ לקטע $[0,1]$, אז נחשב את נקודות החיתוך של הקווים האופייניים $x \pm 2t = 0$, $x \pm 2t = 1$ עם הישר $t = 2$: $x = -4$, $x = -3$, $x = 4$ ו $x = 5$. כעת לפי נוסחת ד'לאמבר

$$u(x,t) = \frac{f(x-2t) + f(x+2t)}{2} + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} g(s)ds.$$

עבור $x<-4$, $x+4<0$ ואז $f(x+4)=f(x-4)=0$ וגם $\int\limits_{x-4}^{x+4} g(s)ds = \int\limits_{x-4}^{x+4} 0ds = 0$.
כלומר $u(x,2)=0$ עבור $x<-4$. עבור $-4\le x<-3$,

$$u(x,2) = \frac{1}{2}f(x+4)+\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{x+4}\pi\cos(\pi s)ds = \frac{1}{2}\sin(\pi(x+4))+\frac{1}{4}\sin(\pi(x+4)) = \frac{3}{4}\sin(\pi(x+4)).$$

עבור $-3\le x<4$,

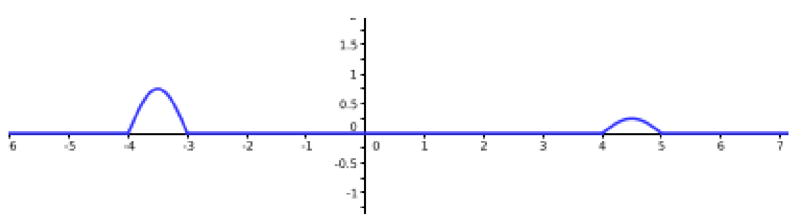
$$u(x,2) = \frac{1}{4}\int\limits_{x-4}^{x+4}\pi\cos(\pi s)ds = \frac{1}{4}\sin(\pi s)\Big|_0^1 = 0.$$

עבור $4\le x<5$,

$$u(x,2) = \frac{1}{2}f(x-4)+\frac{1}{4}\int\limits_{x-4}^{1}\pi\cos(\pi s)ds = \frac{1}{2}\sin(\pi(x-4))+\frac{1}{4}\sin(\pi s)\Big|_{x-4}^{1} = \frac{1}{4}\sin(\pi(x+4)).$$

עבור $5\le x$, $u(x,2)=0$. לסיכום

$$u(x,2) = \begin{cases} 0, & x<-4 \\ \frac{3}{4}\sin(\pi(x+4)), & -4\le x<-3 \\ 0, & -3\le x<4 \\ \frac{1}{4}\sin(\pi(x-4)), & 4\le x<5 \\ 0, & 5\le x \end{cases}.$$



איור 2: הגרף של $u(x,2)$

ב. מכיוון שהפונקציות f ו g הן אפס מחוץ לקטע $[0,1]$, אז מנוסחת ד'לאמבר נובע ש $u(x,t)=0$ בתחומים $\{x-2t>1\}$ ו $\{x<-2t\}$. לפיכך לכל t

$$E(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2(x,t)+4u_x^2(x,t)\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-1-2t}^{1+2t}\left(u_t^2(x,t)+4u_x^2(x,t)\right)dx$$

והאחרון אינטגרל של פונקציה רציפה למקוטעין בקטע חסום ומכאן שאינטגרל מתכנס.

ג. מכיוון ש u מקיית את משוואת הגל, אז האנרגיה נשמרת, כלומר

$$E(t)=E(0)=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(g^2(x)+4\left(f'(x)\right)^2\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\left(\pi^2\cos^2(\pi x)+4\pi^2\cos^2(\pi x)\right)dx=\frac{5\pi^2}{2}.$$

שאלה 3 (20 נק') יהי $u(x,t)$ פתרון של משוואת החום

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=f(x), & -\infty<x<\infty \end{cases}.$$

א. (9 נק') הראה ש $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)=0$, כאשר $f(x)=\begin{cases} 1, & a\le x\le b \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

ב. (8 נק') חשב $\lim\limits_{t\to\infty}u(x,t)$, כאשר $f(x)=\begin{cases} 1, & 1\le x<\infty \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$

ג. (3 נק') הסבר במונחים הסתברותיים את המשמעות של סעיפים א' ו ב' ונמק את השוני בייו שני המקרים.

תשובה

א. הפתרון ניתן באמצעות גרעין גאוס

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}f(y)dy=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int\limits_{a}^{b}e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}dy\left\{\begin{array}{l}\frac{y-x}{\sqrt{4t}}=z\\ dy=\sqrt{4t}dz\end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{a-x}{\sqrt{4t}}}^{\frac{b-x}{\sqrt{4t}}}e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Erf}\left(\frac{b-x}{\sqrt{4t}}\right)-\mathrm{Erf}\left(\frac{a-x}{\sqrt{4t}}\right)\right).$$

לפיכך

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left(\mathrm{Erf}\left(\frac{b-x}{\sqrt{4t}}\right)-\mathrm{Erf}\left(\frac{a-x}{\sqrt{4t}}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Erf}(0)-\mathrm{Erf}(0)\right)=0.$$

ב. באופן דומה לסעיף א',

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{1}^{\infty}e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{1-x}{\sqrt{4t}}}^{\infty}e^{-z^2}dz$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{1-x}{\sqrt{4t}}}^{0}e^{-z^2}dz+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{Erf}\left(\frac{1-x}{\sqrt{4t}}\right)\right).$$

ומכאן

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{Erf}\left(\frac{1-x}{\sqrt{4t}}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{Erf}(0)\right)=\frac{1}{2}.$$

ג. המשמעות ההסתברותית היא $u(x,t)$ זה ההסתברות שחלקיק שנע בתנועה בראונית ושנמצא בזמן $t=0$ בנקודה x יהי בקטע $[a,b]$ בזמן t. בסעיף א', כאשר הקטע סופי, אז בהסתברות 1 החלקיק יוצא מהקטע. ואילו בסעיף ב', כאשר הקטע הוא אינסופי, אז החלקיק חייב להיות איפהשהו, לכן בהסתברות $\frac{1}{2}$ הוא נמצא באחד משני הקטעים האינסופיים.

שאלה 4 (20 נק')

א. (12 נק') פתור את בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_{tt}+2u_t-9u_{xx}=0, & 0<x<\pi, t>0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=\sin x, & 0\leq x\leq \pi \\ u_t(x,0)=2\sin 2x, & 0\leq x\leq \pi \end{cases}.$$

ב. (8 נק') פתור את בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_{tt}+2u_t-9u_{xx}=\sin x\sin(3t), & 0<x<\pi, t>0 \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & t\geq 0 \\ u(x,0)=0, & 0\leq x\leq \pi \\ u_t(x,0)=0, & 0\leq x\leq \pi \end{cases}.$$

הערה: השתמש בשיטת הפרדת המשתנים בכדי לפתור את בעיית שפה התחלה. בצע את כל השלבים מלבד חישוב הערכים ופונקציות עצמיות, שאותם ניתן לדלות מדפי הנוסחאות.

תשובה

א. נעשה הפרדת משתנים $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$, כאשר X_n מקיימת בעיית ערכים עצמיים

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=X(\pi)=0 \end{cases},$$

שפתרונה הוא $\lambda_n=n^2$, $X_n(x)=\sin nx$ ו $n=1,2,\ldots$. אז

$$u_{tt}+2u_t-9u_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}T_n''X_n+2T_n'X_n-9T_nX_n''=\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''+2T_n'+9n^2T_n\right)X_n=0.$$

לפיכך לכל n, T_n מקיים את המשוואה

$$T_n''+2T_n'+9n^2T_n=0.$$

פולינום אופייני של המשוואה הרגילה $k^2+2k+9n^2=(k+1)^2+9n^2-1$. מכיוון ש $9n^2-1^2>0$ לכל $n\geq 1$, אז $k=-1\pm i\sqrt{9n^2-1}$ הם השורשים של הפולינום ולכן

$$T_n(t)=e^{-t}\left(a_n\cos\left(\sqrt{9n^2-1}t\right)+b_n\sin\left(\sqrt{9n^2-1}t\right)\right).$$

<u>פתרון כללי:</u>

$$u(x,t)=e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\sqrt{9n^2-1}t\right)+b_n\sin\left(\sqrt{9n^2-1}t\right)\right)\sin nx.$$

<u>נציב $t=0$:</u>

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx=\sin x.$$

אז $a_1=1$ ושאר המקדמים הם אפס. כעת נגזור לפי t את הפתרון הכללי ונציב $t=0$.
יש לשים לב שבגזירה צריך להשתמש בכלל ליבניץ':

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n+b_n\sqrt{9n^2-1}\right)\sin nx=2\sin 2x.$$

לפיכך, לפי השוואת מקדמים נקבל את המשוואות:

$$-a_1 + b_1\sqrt{8} = 0$$

$$b_2\sqrt{35} = 2.$$

ושאר המקדמים אפס. הפתרון הוא

$$u(x,t) = \left(\cos\left(\sqrt{8}t\right) + \frac{1}{\sqrt{8}}\sin\left(\sqrt{8}t\right)\right)\sin x + \frac{2}{\sqrt{35}}\sin\left(\sqrt{35}t\right)\sin 2x.$$

ב. תהליך הפתרון דומה לזה של סעיף א', מלבד ש

$$T_1'' + 2T_1' + 9^2T_= \sin(3t).$$

ועבור $n \geq 2$

$$T_n'' + 2T_n' + 9n^2T_n = 0.$$

אז

$$T_1(t) = a_1\cos(\sqrt{8}t) + b_1\sin(\sqrt{8}t) + T_p,$$

כאשר

$$T_p'' + 2T_p' + 9T_p = \sin(3t).$$

נציב $T_p(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$, אז הוא מקיים את המשוואה אם $A = -\frac{1}{3}$ ו $B = 0$.

<u>פתרון כללי:</u>

$$u(x,t) = e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\sqrt{9n^2-1t}\right) + b_n\sin\left(\sqrt{9n^2-1t}\right)\right)\sin nx - \frac{1}{3}\cos(3t)\sin x.$$

נציב תנאיי התחלה

$$u(x,0) = (a_1 - \frac{1}{3})\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}a_n\sin nx = 0.$$

אז $a_1 = \frac{1}{3}$ והשאר אפס.

$$u_t(x,0) = \left(-a_1 + \sqrt{8}b_1\right)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\left(-a_n + b_n\sqrt{9n^2-1}\right)\sin nx = 0.$$

לכן $-a_1+\sqrt{8}b_1=0$ ושאר המקדמים הם אפס.

$$u(x,t)=\left(\frac{e^{-t}}{3}\cos(\sqrt{8}t)-\frac{e^{-t}}{3\sqrt{8}}\sin(\sqrt{8}t)-\frac{1}{3}\cos(3t)\right)\sin x.$$

שאלה 5 (20 נק') נתונה בעיית ערכים עצמיים

$$\begin{cases} Y''=-\lambda Y \\ Y'(0)+Y(0)=0 \\ Y'\left(\frac{1}{2}\right)+2Y\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{cases}.$$

א. (8 נק') האם $\lambda=0$ ערך עצמי? אם כן, מהי הפונקציה העצמית.

ב. (12 נק') האם קיים ערך עצמי שללי?

תשובה

א. כאשר $\lambda=0$, אז $Y(x)=Ax+B$.

$$Y'(0)+Y(0)=A+B=0$$
$$Y'\left(\frac{1}{2}\right)+2Y\left(\frac{1}{2}\right)=A+2(A\frac{1}{2}+B)=2(A+B)=0$$

למערכת הזו יש פתרון לא טריביאלי $B=-A$. פונקציה עצמית $Y_0(x)=x-1$.

ב. אם $-\beta^2=\lambda<0$, אז $Y''-\beta^2Y=0$ ומכאו ש

$$Y(x)=A\cosh(\beta x)+B\sinh(\beta x)$$
$$Y'(x)=\beta\left(A\sinh(\beta x)+B\cosh(\beta x)\right).$$

נציב תנאי שפה:

$$Y'(0)+Y(0)=0\Longrightarrow \beta B+A=0\Longrightarrow B=-\frac{A}{\beta};$$

$$Y'(1/2)+2Y(1/2)=0\Longrightarrow A\left[\beta\sinh(\beta/2)-\cosh(\beta/2)+2\cosh(\beta/2)-\frac{2}{\beta}\sinh(\beta/2)\right]=0$$

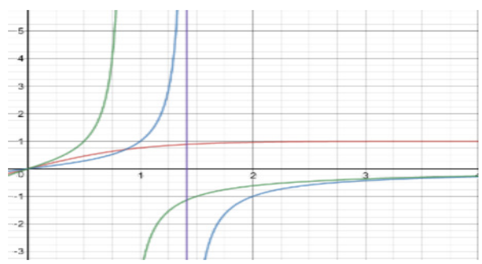
מכיוון ש $A \neq 0$, אז

$$\frac{\beta^2-2}{\beta}\sinh(\beta/2)+\cosh(\beta/2)=0,$$

או

$$\frac{\sinh(\beta/2)}{\cosh(\beta/2)}=\tanh(\beta/2)=\frac{-\beta}{\beta^2-2}:=g(\beta). \tag{3}$$

כעת, $\lambda_0=-\beta_0^2$ ערך עצמי שלילי, אם ורק אם $\beta_0>0$ פתרון של המשוואה (3). הפונקציה $\tanh(\beta/2)$ היא מונוטונית עולה, $\tanh(0)=0$, $\lim_{\beta\to\infty}\tanh(\beta/2)=1$ וניתן גם להראות שהיא פונקציה קעורה. הפונקציה g מקיימת $g(0)=0$, $\lim_{\beta\to\infty}g(\beta)=0$ ויש לה אסימפטוטה אנכית בנקודה $\beta=\sqrt{2}$. נבדוק את הנגזרת: $g'(\beta)=-\frac{-\beta^2-2}{(\beta^2-2)^2}$, כלומר g מונוטונית עולה. לכן קיימות שתי אפשריות.



איור 3: אדום $\tanh$, כחול או ירוק g

את השאלה האם קיים חיתוךביין שני הגרפים ניתן לקבוע לפי הנגזרות בנקודה $\beta=0$: $\tanh'(\beta/2)\Big|_{\beta=0}=\frac{1}{2}$ ו $g'(0)=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$. לכן עבור β "קטן" $g(\beta)>\tanh(\beta)$ והגרפים אינם נחתכים. לפיכך אין ערך עצמי שלילי. $\square$

שאלה 6 (20 נק')

א. (14 נק')

תהי u פונקציה בעלת נגזרות חלקיות מסדר שני שרציפות ב $B_R=\{x^2+y^2<R^2\}$. נגדיר את הממוצע המעגלי

$$M(r)=\begin{cases} u(0,0), & r=0 \\ \frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\{x^2+y^2=r^2\}} u\,ds, & 0<r<R \end{cases},$$

כאשר ds זה מידדת (אלמנט) אורך הקשת. הראה ש

$$\frac{d}{dr}M(r) = \frac{1}{2\pi r} \iint\limits_{\{x^2+y^2\le r^2\}} \Delta u dxdy, \quad 0 < r < R.$$

ב. (6 נק') בנוסף להנחות בסעיף א', נניח כי $\Delta u \geq 0$ בעיגול B_R. הראה שלכל $r > 0$

$$u(0,0) \leq \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\{x^2+y^2=r^2\}} u ds.$$

רמז:

- האינטגרל בהצגה פרמטרית:

$$\frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\{x^2+y^2=r^2\}} u ds = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta) d\theta.$$

- משפט הדיוורגנס של גאוס: יהי Ω תחום עם שפה $\partial\Omega$, ונתון ש $\vec{F} \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, אז

$$\int\limits_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \int\limits_{\Omega} \mathrm{div} \vec{F} dxdy,$$

כאשר $\hat{n}$ נורמל היחידה לשפה $\partial\Omega$ בכיוון החיצוני. עבור $\partial\Omega = \{x^2+y^2=r^2\}$, הנורמל הוא $\hat{\eta} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$.

תשובה

א. על סמך ההצגה של האינטגרל הקווי ומשפט הדיוורגנס

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dr}(r) &= \frac{d}{dr}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(u_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + u_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(\vec{\nabla} u \cdot \hat{\eta}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{\{x^2+y^2=r^2\}} \left(\vec{\nabla} u \cdot \hat{\eta}\right) ds = \frac{1}{2\pi r} \iint\limits_{\{x^2+y^2\le r^2\}} \left(\mathrm{div}(\vec{\nabla} u)\right) dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi r} \iint\limits_{\{x^2+y^2\le r^2\}} \Delta u dxdy.
\end{aligned}$$

ב. מסעיף א', אם $\Delta u \geq 0$, אז M מונוטונית עולה ולכן

$$u(0,0)=M(0)\leq M(r)=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{\{x^2+y^2=r^2\}} uds.$$