# משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

## מבחן מועד א', תשע"ה – 3.7.2015

**מרצה:** לביא קרפ

**מספר סטודנט:**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | |

**הוראות לנבחן:**

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שלוש שעות (180 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר, מלבד דף נוסחאות שמצורף.
- יש לכתוב את התשובות במחברת הבחינה.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש 6 שאלות (פותחות). משאלות 1-5 יש לבחור 4 שאלות. שאלה 6 חובה. נא לסמן בטבלה איזה שאלות בחרת לענות.

**אני בחרתי לענות על שאלות מספר (נא לסמן ב X):**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

- יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

## בהצלחה!

---

**לשימוש הבודקים**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | סה"כ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**שאלה 1** (22 נק') נתונה המשוואה

$$u_x - 4yu_y = 0. \qquad \textbf{(1)}$$

א. (7 נק') שרטט את הקווים האופייניים

ב. (8 נק') פתור את המשוואה (1) עם תנאי ההתחלה $u(0,y) = e^y$.

ג. (7 נק') האם ניתן לפתור את המשוואה (1) עם תנאי ההתחלה $u(x,0) = e^x$.

**שאלה 2** (22 נק')

יהי $u(x,t)$ פתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

כאשר $f(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$ ו $g(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$.

א. (12 נק') חשב $\max_{\{t\ge0\}} u(10,t)$.

ב. (10 נק') חשב

$$E(10) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left((u_t(x,10))^2 + (u_x(x,10))^2\right) dx$$

**שאלה 3** (22 נק') יהי $u(x,t)$ פתרון של משוואת החום עם גורם פזרנות

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + bu = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

כאשר $b$ קבוע חיובי.

א. (3 נק') הראה ש $u(x,t) = e^{-bt}v(x,t)$ כאשר $v(x,t)$ פתרון משוואת החום $v_t - v_{xx} = 0$ עם אותם תנאי התחלה.

ב. (9 נק') הראה שאם $|f(x)| \le M$, אז $|u(x,t)| \le Me^{-bt}$ לכל $t > 0$.

ג. (10 נק') הראה שאם $|f(x)| \le Me^{x}$, אז $|u(x,t)| \le Me^{-bt+t}e^{x}$ לכל $t > 0$.

**שאלה 4** (22 נק')

נתונה בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sin(\omega t)\sin 2x, & 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \ge 0 \\ u(x,0) = \sin x, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}, \qquad \textbf{(2)}$$

כאשר $\omega > 0$.

א. (12 נק') חשב את הפתרון עבור $\omega \ne 2c$.

ב. (10 נק') חשב את הפתרון עבור $\omega = 2c$

**שאלה 5** (22 נק') נתונה בעיית ערכים עצמיים רובין

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y'(0) - a_0 Y(0) = 0 \\ Y'(1) + a_1 Y(1) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

כאשר $a_0$ ו $a_1$ קבועים.

א. (9 נק') הראה שהערכים העצמיים השליליים נקבעים על ידי המשוואה

$$\tanh(\beta) = -\frac{(a_0 + a_1)\beta}{\beta^2 + a_0 a_1}, \tag{4}$$

כאשר $\lambda = -\beta^2$.

ב. (13 נק') נניח כי $a_0 < 0$ ו $(a_0 + a_1) > 0$. הראה שאם $(a_0 + a_1) < -a_0 a_1$, אז קיים ערך עצמי שלילי אחד בלבד, ואילו אם $(a_0 + a_1) \geq -a_0 a_1$ אז אין ערכים עצמיים שליליים.

**שאלה 6** (12 נק')

יהי $u(x, y)$ פתרון של בעיית דירכלה

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \{x^2 + y^2 < 4\} \\ u(x, y) = y^3, & \{x^2 + y^2 = 4\} \end{cases}$$

ויהי $v(x, y)$ פתרון של בעיית דירכלה

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & \{x^2 + y^2 < 4\} \\ v(x, y) = |y^3|, & \{x^2 + y^2 = 4\} \end{cases}.$$

הראה ש $v(x, y) > u(x, y)$ לכל $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}$.