מכללת אורט בראודה - המחלקה למתמטיקה

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

מבחן מועד א', תשע"ו – 28.6.2016

הוראות לנבחן:

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שלוש שעות (180 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר, מלבד דף נוסחאות שמצורף.
- יש לכתוב את התשובות במחברת הבחינה.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש 6 שאלות (פותחות). משאלות 1-5 יש לבחור 4 שאלות. שאלה 6 חובה. נא לסמן בטבלה איזה שאלות בחרת לענות.

אני בחרתי לענות על שאלות מספר (נא לסמן ב X):

1	2	3	4	5

- יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

1	2	3	4	5	6	סה"כ

שאלה 1 (20 נק') נתונה המשוואה

$$xu_x + u_y = 0. \tag{1}$$

א. (7 נק') מצא קווים אופייניים ושרטט אותם.

ב. (7 נק') פתור את המשוואה (1) עם תנאי ההתחלה $u(x,0) = x^2$.

ג. (6 נק') האם למשוואה (1) עם תנאי ההתחלה $u(0,y) = y^2$ קיים פתרון?

שאלה 2 (20 נק') נתונה בעיית התחלה משוואת הגל

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x,t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = g(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{2}$$

כאשר $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 2 \\ 4 - x, & 2 \le x \le 4 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$ ו $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$.

א. (10 נק') חשב את הפונקציה $u(x,3)$ ושרטט את הגרף כאשר $F(x,t) = 0$.

ב. (4 נק') קבע היכן הפתרון אינו C^2 כאשר $F(x,t) = 0$.

ג. (6 נק') חשב $u(3,3)$ כאשר $F(x,t) = xt$.

שאלה 3 (20 נק') נתונה משוואת הגל

$$\begin{cases} u_{tt} - 9u_{xx} = \sin x \cos(\omega t), & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x,0) = \sin(2x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

א. (10 נק') חשב את הפתרון עבור $\omega \neq 3$.

ב. (7 נק') חשב את הפתרון עבור $\omega = 3$.

ג. (3 נק') ציין את ההבדל ביין שני המצבים.

הערה: השתמש בשיטת הפרדת המשתנים בכדי לפתור את בעיית שפה התחלה. בצע את כל השלבים מלבד חישוב הערכים ופונקציות עצמיות, שאותם ניתן לדלות מדפי הנוסחאות.

שאלה 4 (20 נק')

נתונה הפונקציה בעיית דירכלה בטבעת

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{1 < x^2 + y^2 < 9\} \\ u = \cos^2\theta & \text{on } \{x^2 + y^2 = 1\} \\ u = 0 & \text{on } \{x^2 + y^2 = 9\} \end{cases}.$$

א. (12 נק') חשב את הפתרון. **הערה ורמז: 1.** ניתן להתחיל את הפתרון מהנוסחה של פתרון כללי של בעיית דירכלה בטבעת. **2.** מספיק לבטא את הפתרון בקואורדינטות קוטביות.

3. $\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$.

ב. (8 נק') חשב

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(-2 + \cos\theta, \sin\theta\right) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\{(x+2)^2+y^2=1\}} u ds.$$

שאלה 5 (20 נק')

נתונה משוואת החום ברצועה

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u_x(0,t) - a_0 u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u_x(1,t) + a_1 u(1,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases},$$

כאשר f פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$ ו a_0 ו a_1 קבועים. הפתרון ניתן על ידי הטור האינסופי

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n t} X_n(x)$$

ו

$$E(t) = \int_0^1 u^2(x,t)dx$$

היא פונקציית האנרגיה.

א. (5 נק') תאר כיצד מחשבים את X_n ו λ_n.

ב. (5 נק') הסבר מדוע $E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 e^{-2\lambda t} ||X_n||^2$, כאשר $||X_n||^2 = \int_0^1 X_n^2(x)dx$.

ג. (10 נק') מצא מקדמים a_0 ו a_1 כך ש $\lim_{t\to\infty} E(t) = \infty$.

שאלה 6 (20 נק') יהי $R_T = \{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ מלבן במישור ו

$$\partial_p R_T = \{(0,t) : 0 \le t \le T\} \cup \{(x,0) : 0 \le x \le 1\} \cup \{(1,t) : 0 \le t \le T\}$$

השפה הפרבולית של R_T.

א. (6 נק') נסח את עקרון המקסימום למשוואת החום.

ב. (14 נק') הראה שאם:

(i) $u \in C^2(R_T \setminus \partial_p R_T) \cap C(R_T)$,

(ii) $u_t - u_{xx} < 0$ ב $C^2(R_T \setminus \partial_p R_T)$,

(iii) $\max_{(x,t) \in R_T} u(x,t) = u(x_0, t_0)$,

אז

$$(x_0, t_0) \in \partial_p R_T.$$

רמז: הראה שאם $(x_0, t_0) \in R_T \setminus \partial_p R_T$ (נקודה פנימית), אז מקבלים סתירה לאי השוויון הדיפרנציאלי (ii).