

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

מבחן אמצע, תשע"ו – 21.4.2016

מרצה: לביא קרפ

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

מספר סטודנט:

הוראות לנבחן:

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שעתיים (120 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר.
- יש לכתוב את התשובות במחברות.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש שלוש שאלות (פותחות) שעליהן יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

סה"כ	3	2	1

שאלה 1 (30 נק') נתונה בעיית התחלה

$$(1) \quad \begin{cases} u_t + xu_x = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & 1 \leq x \end{cases} \text{ כאשר}$$

א. (7 נק') שרטט קווים אופייניים של בעיית ההתחלה (1).

ב. (8 נק') חשב את הפתרון של בעיית ההתחלה (1).

ג. (7 נק') היכן הפתרון של בעיית ההתחלה (1) אינו C^1 ?

ד. (8 נק') היכן הפתרון של בעיית ההתחלה (1) שווה לקבוע $\frac{1}{2}$?

שאלה 2 (30 נק')

נתונה בעיית התחלה

$$(2) \quad \begin{cases} u_{xx} + u_{xt} - 20u_{tt} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = x^2, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = e^x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

א. (5 נק') מצא את סוג המשוואה (אליפטי, פרבולי או הפרבולי).

ב. (15 נק') מצא פתרון כללי של המשוואה (2).

רמז: בצע שינוי משתנים $\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} y \\ \tau \end{bmatrix}$, כאשר B מטריצה 2×2 שנקבעת על ידי המקדמים של המשוואה.

ג. (10 נק') חשב את הפתרון של בעיית ההתחלה (2).

שאלה 3 (40 נק')

יהי u פתרון של בעיית מיתר אינסופי

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases} \quad \text{כאשר} \quad f(x) = \begin{cases} 2 - |x|, & |x| \leq 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

א. (10 נק') חשב $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t, t)$.

ב. (15 נק') שרטט את הפתרון בזמן $t = 1$.

ג. (5 נק') יהי

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)) dx$$

אינטגרל האנרגיה. הסבר מדוע $E(t)$ מתכנס לכל t חיובי.

ד. (10 נק') חשב $E(t)$ לכל t חיובי.

תשובה: