משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

מבחן אמצע, תשע"ב – 28.5.2012

מרצה: לביא קרפ

מספר סטודנט:

הוראות לנבחן:

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שלוש שעות (120 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר.
- יש לכתוב את התשובות בגוף השאלון במקום המיועד לכך. המחברות משמשות כטיוטה בלבד לא תיבדקנה.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש 4 שאלות (פותחות) שעליהן יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

1	2	3	4	סה"כ

שאלה 1 (15 נק') נתונה בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_t + cu_x = -\gamma u \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}, \qquad \gamma, c > 0. \tag{1}$$

א. פתור את בעיית ההתחלה.

רמז: הצב $v(x,t) = e^{\gamma t}u(x,t)$.

ב. תהי $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ ו $g(x) = \beta H(x)$, כאשר $\beta > 0$. הראה שהפתרון של (1) אינו רציף על הישר $x = ct$.

שאלה 2 (15 נק')

א. חשב את הפתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin(x+t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

ב. יהי u פתרון של בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin(x+t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = e^{-|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = e^{-x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

הראה שעבור $x \in \mathbb{R}$ ו $t \in [0,6]$ מתקיים

$$|u(x,t)| \leq 25.$$

שאלה 3 (15 נק')

יהי u פתרון של בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0)=0, & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=H(x-2), & x\in\mathbb{R} \end{cases},$$

כאשר $H(x)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$.

א. כתוב נוסחה לפתרון.

ב. שרטט את הפתרון בזמנים $t=\frac{1}{2}$, $t=1$ ו $t=2$.

שאלה 4 (15 נק')

הוכח את למה הבאה שקשורה לעקרון המקסימום של משוואת החום.

למה: יהי

$$R_t=\{0\leq x\leq 1, 0\leq t\leq T\}$$

ו

$$\partial_p R_T=\{(0,t):0\leq t\leq T\}\cup\{(x,0):0\leq x\leq 1\}\cup\{(1,t):0\leq t\leq T\}$$

השפה הפרבולית. הוכח שאם

א. $u\in C(R_T)\cap C^2(R_T\setminus\partial_p R_T)$;

ב. $u_t-u_{xx}<0$ ב $R_T\setminus\partial_p R_T$.

אז המקסימום של u ב R_T מתקבל על השפה הפרבולית $\partial_p R_T$. (במילים אחרות, אם $\max_{R_T} u=u(x_0,t_0)$, אז $(x_0,t_0)\in\partial_p R_T$).

תשובה: