

דף נוסחאות

משוואות דיפרנציאליות חלקיות

201006

2014

• Error function: $\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$, $\text{Erf}(\infty) = 1$

• גרעין גאוס (החום) עבור $u_t - \kappa u_{xx} = 0$: $S(x, t) = \frac{1}{\sqrt{k4\pi t}} e^{-\frac{(x)^2}{4kt}}$

• גרעין פואסון: קורדינאטות קוטביות

$$P(r, \theta, \varphi) := \frac{1}{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2};$$

בקואורדינטות קארטזיות: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$

$$P(\mathbf{x}, \xi) := \frac{1}{2\pi R} \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \xi|^2}.$$

• פתרון של בעיית שטורם ליוביל (דירכלה):

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y(0) = Y(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = n^2, Y_n(x) = \sin(nx), n = 1, 2, 3, \dots$$

• פתרון של בעיית שטורם ליוביל (נוימן):

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y'(0) = Y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \dots, Y_0(x) = 1, Y_n(x) = \cos(nx), n = 1, 2, 3, \dots$$

• פתרון של בעיית ערכים עצמיים מחזוריים:

$$, \begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y(0) = Y(2\pi) \\ Y'(0) = Y'(2\pi) \end{cases}$$

$$\lambda_n = n^2, n = 0, 1, 2, \dots, Y_0(x) = 1, Y_n(x) = \begin{cases} \cos(nx) \\ \sin(nx) \end{cases}, n = 1, 2, 3, \dots$$

• פתרון משוואת אוילר:

$$x^2 Y_n'' + x Y_n' - n^2 Y_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Y_0(x) = A_0 \ln(x) + B_0, \quad n = 0$$

$$Y_n(x) = A_n x^n + B_n x^{-n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

נוסחאות טריגונומטריות

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha) \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\beta) \sin(\alpha) \\
\cos(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \\
\sin(\alpha) \cos(\beta) &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\
\sin(\alpha) \sin(\beta) &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\
\sin(2\alpha) &= 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\
\cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}
\end{aligned}$$

תנאי שפה לא הומוגניים - משוואת החום

1. תנאי שפה דירכלה:

$$\begin{cases} u_t - \kappa u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, 0 \leq t \\ u(0, t) = a(t), u(\pi, t) = b(t), & 0 \leq t \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$w(x, t) = a(t) + \frac{x}{\pi}(b(t) - a(t))$$

2. תנאי שפה נוימן:

$$\begin{cases} u_t - \kappa u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, 0 \leq t \\ u_x(0, t) = a(t), u_x(\pi, t) = b(t), & 0 \leq t \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

$$w(x, t) = xa(t) + \frac{x^2}{2\pi}(b(t) - a(t))$$