

# משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

מבחן סופי מועד ב', תשע"ב – 25.7.2012

מרצה: לביא קרפ

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

מספר סטודנט:

## הוראות לנבחן:

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שלוש שעות (180 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר.
- יש לכתוב את התשובות בגוף השאלון במקום המיועד לכך. המחברות משמשות כסיוטה בלבד לא תיבדקנה.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש 6 שאלות (פותחות) שעליהן יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

## בהצלחה!

---

### לשימוש הבודקים

סה"כ	6	5	4	3	2	1

**שאלה 1** (15 נק') נתונה המשוואה

(1)  $(1 + x^2)u_x + u_y = 0.$

א. פתור את המשוואה (1) עם תנאי התחלה  $u(x, 0) = g(x)$ .

ב. באיזה תחום של המישור  $\mathbb{R}^2$  הפתרון קיים?

**שאלה 2** (20 נק') יהי  $u$  פתרון של בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

כאשר

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 4 - x, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \quad | \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

א. לכל  $x_0$  חשב  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x_0, t)$ .

ב. חשב  $E(10)$ , כאשר

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (u_t^2(x, t) + u_x^2(x, t)) dx.$$

**שאלה 3** (15 נק') יהי  $u$  פתרון של בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = \cos(x^2) \end{cases}.$$

הראה ש

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0.$$

**רמז:** בצע שינוי משתנים  $u(x, t) = e^{\alpha t} v(x, t)$ , מצא את ה  $\alpha$  המתאים.

**שאלה 4** (20 נק') נתונה בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \cos \omega t \cos x, & 0 < x < \pi, 0 \leq t \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

א. חשב את הפתרון לכל  $\omega > 0$ . בצע את כל השלבים פרט לחישוב של ערכים ופונקציות עצמיות.

ב. עבור איזה  $\omega = 0$  המייתר נמצא במצב של תהודה (פתרון לא חסום עבור  $t \in [0, \infty)$ ).

**שאלה 5 (15 נק')**

נתונה בעיית ניומן

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{x^2 + y^2 < 4\} \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\theta, 2) = g(\theta), & \text{on } \{x^2 + y^2 = 4\} \end{cases} .$$

(גזרת בכיוון הנורמל  $\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$ )

א. הראה ש  $\int_{\{x^2+y^2=4\}} g ds = 0$  תנאי הכרחי לקיום הפתרון של בעיית ניומן.

ב. בהינתן שהפתרון של (2) ניתן על ידי

$$u(\theta, \rho) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)),$$

חשב את המקדמים  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  |  $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$  באמצעות מקדמי פורייה של הפונקציה

*g*.

**שאלה 6 (15 נק')**

נתונה בעיית ערכים עצמיים

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ 2y'(0) + y(0) = 0 \\ 2y'(1) - y(1) = 0 \end{cases} .$$

א. הראה שקיים לפחות ערך עצמי שלילי אחד.

ב. קבע את מספר הערכים העצמיים השליליים.