

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

מבחן סופי מועד א', תשע"ב – 28.6.2012

מרצה: לביא קרפ

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

מספר סטודנט:

הוראות לנבחן:

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שלוש שעות (180 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר.
- יש לכתוב את התשובות בגוף השאלון במקום המיועד לכך. המחברות משמשות כסיוטה בלבד לא תיבדקנה.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש 6 שאלות (פותחות) שעליהן יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

סה"כ	6	5	4	3	2	1

שאלה 1 (15 נק') נתונה בעיית התחלה

$$(1) \quad \begin{cases} u_t + cu_x = -\gamma u \\ u(x, 0) = g(x) \end{cases}, \quad \gamma, c > 0.$$

א. פתור את בעיית ההתחלה.

רמז: הצב $v(x, t) = e^{\gamma t}u(x, t)$.

ב. תהי $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, כאשר $\beta > 0$. הראה שהפתרון של (1) אינו רציף על הישר $x = ct$.

שאלה 2 (20 נק') יהי u פתרון של בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = e^{-|x|}, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

א. חשב $u(4, 2)$.

ב. האם הפתרון דיפרנציאבילי (גזיר) לאורך הישר $x = 2t$? נמק היטב!

שאלה 3 (20 נק') יהי u פתרון של בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases} \end{cases}.$$

א. בטא את הפתרון באמצעות Error-function.

ב. חשב $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

ג. הסבר מדוע הנגזרות החלקיות של הפתרון, $u(x, t)$ (סדר ראשון) רציפות לכל $t > 0$.

שאלה 4 (15 נק') נתונה בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_{tt} + 2u_t - 9u_{xx} = 0, & (x, t) \in (0, \pi) \times (0, \infty) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in [0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), & x \in [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

בטא את הפתרון באמצעות מקדמי פורייה של f . בצע את כל השלבים פרט לחישוב של ערכים ופונקציות עצמיות.

שאלה 5 (15 נק') יהי u פתרון בעיית דירכלה בחצי עגול

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{x^2 + y^2 < 1, y > 0\} \\ u(x, y) = x^2 y^3, & \text{on } \{x^2 + y^2 = 1, y > 0\} \\ u(x, y) = 0, & \text{on } \{|x| \leq 1, y = 0\} \end{cases}$$

א. הראה ש $u(x, y) > 0$ עבור $(x, y) \in \{x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$.

ב. האם קיים $(x_0, y_0) \in \{x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$ כך ש $u(x_0, y_0) > 1$.

שאלה 6 (15 נק')

נתונה בעיית ערכים עצמיים מחזורית

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0) = y(1) \\ y'(0) = y'(1) \end{cases}$$

הראה שפונקציות עצמיות של ערכים עצמיים שונים אורתוגונליות. כלומר, אם

y_2 ו y_1 מקיימות אותם תנאי שפשה ו $\lambda_1 \neq \lambda_2$, אז $-y_2'' = \lambda_2 y_2$, $-y_1'' = \lambda_1 y_1$

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_0^1 y_1(x)y_2(x)dx = 0.$$