משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

מבחן סופי מועד ב', תשע"ב – 25.7.2012

מרצה: לביא קרפ

מספר סטודנט: | | | | | | | | | |

הוראות לנבחן:

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שלוש שעות (180 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר.
- יש לכתוב את התשובות בגוף השאלון במקום המיועד לכך. המחברות משמשות כטיוטה בלבד לא תיבדקנה.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש 6 שאלות (פותחות) שעליהן יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

סה"כ	6	5	4	3	2	1

שאלה 1 (15 נק') נתונה המשוואה

$$(1+x^2)u_x + u_y = 0. \qquad (1)$$

א. פתור את המשוואה (1) עם תנאי התחלה $u(x,0)=g(x)$.

ב. באיזה תחום של המישור $\mathbb{R}^2$ הפתרון קיים?

שאלה 2 (20 נק') יהי u פתרון של בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R} \\ u_t(x,0)=g(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

כאשר

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x<2 \\ 4-x, & 2\le x\le 4 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \quad \text{ו} \quad g(x)=\begin{cases} 1-x^2, & |x|\le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

א. לכל x_0 חשב $\lim_{t\to\infty} u(x_0,t)$.

ב. חשב $E(10)$, כאשר

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2(x,t)+u_x^2(x,t)\right)dx.$$

שאלה 3 (15 נק') יהי u פתרון של בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \cos(x^2) \end{cases}.$$

הראה ש

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0.$$

רמז: בצע שינוי משתנים $u(x,t) = e^{\alpha t}v(x,t)$, מצא את ה α המתאים.

שאלה 4 (20 נק') נתונה בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = \cos\omega t \cos x, & 0 < x < \pi, 0 \le t \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & 0 \le t \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

א. חשב את הפתרון לכל $\omega > 0$. בצע את כל השלבים פרט לחישוב של ערכים ופונקציות עצמיות.

ב. עבור איזה $\omega = 0$ המייתר נמצא במצב של תהודה (פתרון לא חסום עבור $t \in [0,\infty)$).

שאלה 5 (15 נק')

נתונה בעיית ניומן

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{x^2+y^2<4\} \\ \dfrac{\partial u}{\partial \hat{n}}(\theta,2) = g(\theta), & \text{on } \{x^2+y^2=4\} \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

($\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$-נגזרת בכיוון הנורמל)

א. הראה ש $\int_{\{x^2+y^2=4\}} g ds = 0$ תנאי הכרחי לקיום הפתרון של בעיית ניומן.

ב. בהינתן שהפתרון של (2) ניתן על ידי

$$u(\theta,\rho) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right),$$

חשב את המקדמים $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ו $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ באמצעות מקדמי פורייה של הפונקציה g.

שאלה 6 (15 נק')

נתונה בעיית ערכים עצמיים

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ 2y'(0) + y(0) = 0 \\ 2y'(1) - y(1) = 0 \end{cases}.$$

א. הראה שקיים לפחות ערך עצמי שלילי אחד.

ב. קבע את מספר הערכים העצמיים השליליים.

פתרון

שאלה 1: א. משוואות הקווים האופייניים הינן

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2},$$

לכן

$$y = y(x) = \arctan x + c.$$

ומכאן, פתרון כללי

$$u(x,y) = F(\arctan x - y), \quad F: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1.$$

נציב תנאי התחלה

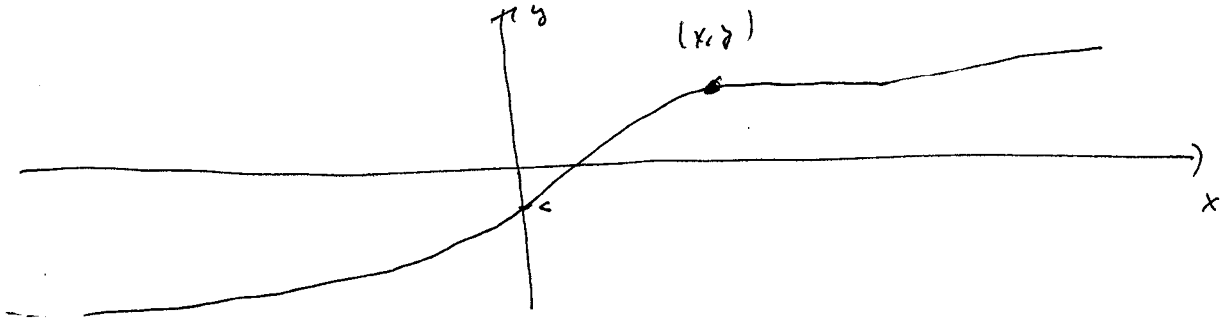
$$u(x,0) = F(\arctan x) = g(x).$$

לכן

$$F(t) = g(\tan t). \quad \left(\begin{array}{l} t = \arctan x \Leftrightarrow \\ x = \tan t \end{array}\right)$$

$$u(x,y) = g\big(\tan(\arctan x - y)\big).$$

ב. תנאי הכרחי לכך שהפתרון קיים בנקודה (x,y) הינו שקיים קו אופייני שמחבר את (x,y) לציר ה-x.

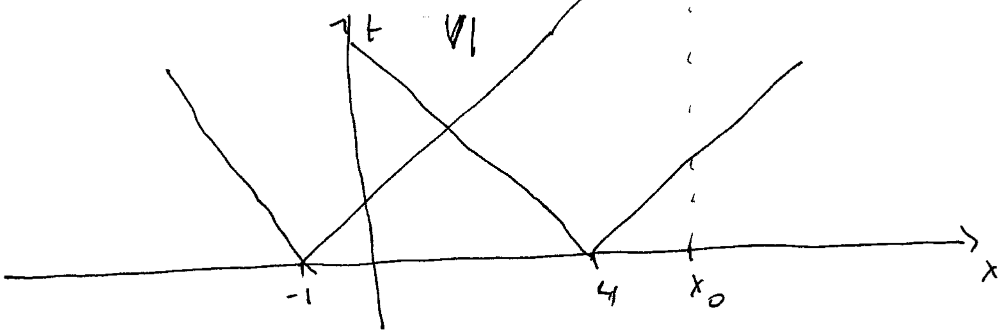


לפיכך, הפתרון קיים בתחום

$$\left\{(x,y) : \arctan x - \frac{\pi}{2} < y < \arctan x + \frac{\pi}{2}\right\}.$$

שאלה 2

א. תחילה נשרטט, קווים אופייניים הרלוונטיים לתנאי התחלה.



לכל x_0, אם t מספיק קטן, אזי (x_0,t) נמצא באיזור $\underline{VI}$.
באיזור הזה, לפי נוסחת ד'אלמבר, $u(x_0,t)$ תלוי
רק באינטגרל של g בקטע $[-1,4]$.

$$u(x_0,t)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{4} g(s)\,ds=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-s^2)\,ds=\frac{2}{3}.$$

$$\lim_{t\to 0} u(x_0,t)=\frac{2}{3}.$$

ב. $E(t)$ זה האנרגיה, וכפי שאמרנו, האנרגיה
במשוואת נשמרת, כלומר

$$E(10)=E(0)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left((g(x))^2+(f'(x))^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2\,dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{4}1^2\,dx=\frac{8}{15}+2.$$

שאלה 3: נגדיר $u(x,t)=e^{\alpha t}v(x,t)$ ונחפש תחילה את

הערך של α כך שנקבל את משוואת החום $v_t-v_{xx}=0$.

$$u_t=e^{\alpha t}(\alpha v+v_t)$$
$$u_{xx}=e^{\alpha t}v_{xx}$$

ולכן

$$(u_t-u_{xx}+2u)=e^{\alpha t}(\alpha v+v_t-v_{xx}+2v)$$
$$=e^{\alpha t}(v_t-v_{xx})$$

אם $\alpha=-2$.

אז v מקיים

$$v_t-v_{xx}=0$$
$$v(x,0)=u(x,0)=\cos(x^2)$$

ולכן ש

$$v(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y,t)\cos(y^2)\,dy$$

כאשר K גרעין החום.

מכיוון ש $\cos(y^2)$ חסומה, אז

$$|v(x,t)|\le\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y,t)\,|\cos(y^2)|\,dy$$
$$\le\int_{-\infty}^{\infty}K(x-y,t)\,dy=1.$$

אז

$$u(x,t)=e^{-2t}v(x,t)$$
$$|u(x,t)|\le e^{-2t}|v(x,t)|\le e^{-2t}$$

ולכן

נקבל ש

$$\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0.$$

שאלה 4: מכיוון שתנאי השפה הם נוימן, אז בעיית
ערכים עצמ"ים הינה

$$-X''=\lambda X$$
$$X'(0)=X'(\pi)=0$$

אז ע"ע $\lambda_n=n^2$, $n=0,1,2,\dots$

פ"ע $X_0=1$! $X_n=\cos(nx)$, $n=1,2,\dots$.

עבור $n=0$:

$$T_0''=0$$
$$T_0(t)=a_0+b_0t$$

$n\geq 2$:

$$T_n''+4n^2T_n=0$$
$$T_n(t)=a_n\cos(2nt)+b_n\sin(2nt)$$

$n=1$:

$$T_1''+4T_n=\cos(\omega t)$$

אז

$$T_1(t)=a_1\cos(2t)+b_1\sin(2t)+T_p$$

כאשר

$$T_p''+4T_p=\cos(\omega t).$$

כפי נתון כי $\omega\neq 2$ אז

$$T_p(t)=A\cos(\omega t)$$

ומחישוב נקבל ש

$$A=\frac{1}{4-\omega^2}$$

פתרון כללי של המשוואה יהיה

$$u(x,t)=a_0+bt+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(2nt)+b_n\sin(2nt)\right)\cos(nx)+\frac{1}{4-\omega^2}\cos(\omega t)\cos(x)$$

$$u(x,0)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+\frac{1}{4-\omega^2}\cos(x),$$

אז $a_n=0$ לכל $n\neq 1$

$$a_1=-\frac{1}{4-\omega^2}.$$

$$u_t(x,0) = b_0 + \sum_{1}^{\infty} 2n\, b_n \cos(nx) = 0$$

לכן $b_n = 0$ לכל n

פתרון עבור $\omega \neq 2$:

$$u(x,t) = \frac{1}{4-\omega^2}\Big(-\cos(2t) + \cos(\omega t)\Big)\cos(x)$$

פתרון עבור $\omega = 2$: נגדיר $F(\omega,t) = \frac{1}{4-\omega^2}\Big(-\cos(2t)+\cos(\omega t)\Big)$

$$U_\varepsilon(x,t) = F(\omega,t)\cos(x).$$

לכל $\omega \neq 2$ $U_\varepsilon(x,t)$ פתרון של הבעיה. כעת נשאיף

כלו' $\omega \to 2$.

$$\lim_{\omega\to 2} F(\omega,t) = \lim_{\omega\to 2} \frac{-\cos(2t)+\cos(\omega t)}{4-\omega^2} =$$

$$= \lim_{\omega\to 2} \frac{-t\sin(\omega t)}{-2\omega} = \frac{t\sin(2t)}{4}$$

עבור $\omega = 2$

$$u(x,t) = \frac{t\sin(2t)}{4}\cos(x)$$

ד. לכל $\omega \neq 2$ הפתרון חסום, אולם עבור $\omega = 2$

אנו רואים שהפתרון אינו חסום ב t.

ולכן נוצר מצב תהודה.

שאלה 5:

א. נשתמש במשפט גאוס ולכן

$$\iint_{\{x^2+y^2<4\}} \Delta u\,dx\,dy = \iint_{\{x^2+y^2<4\}} \operatorname{div}(\vec\nabla u)\,dx\,dy = \int_{\{x^2+y^2=4\}} \frac{\partial u}{\partial \vec n}\,ds = \int_{\{x^2+y^2=4\}} g\,ds,$$

מכיוון ש $\Delta u=0$, אז תנאי הכרחי לקיום הוא אפס.

ב. הנורמל הוא $\vec n = \cos\theta\,\vec i + \sin\theta\,\vec j$

אז

$$\frac{\partial u}{\partial \vec n} = u_x\cos\theta + u_y\sin\theta = \frac{\partial}{\partial \rho}u(\theta,\rho).$$

לכן

$$\frac{\partial u}{\partial \vec n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}\left(a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right)$$

נציב $\rho=2$ ונקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{n-1}\left(a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)\right)$$

ולכן ש

$$n\,2^{n-1}a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta$$

$$n\,2^{n-1}b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta.$$

מקרה 6: נניח $-\beta^2=\lambda$ אז

אז $y(x)=A\cosh(\beta x)+B\sinh(\beta x),$

$$y'(x)=\beta\left(A\sinh(\beta x)+B\cosh(\beta x)\right)$$

נציב את תנאי השפה

$$2y'(0)+y(0)=0$$

$$2y'(1)-y(1)=0$$

במטריצה, אז

$$\begin{bmatrix} 1 & 2\beta \\ 2\beta\sinh\beta-\cosh\beta & 2\beta\cosh\beta-\sinh\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

קיים פ"ט שאינו אפס אמ"מ למטריצה קיים
פתרון לא טריוויאלי. כך שנקבל לכך
שהדטרמיננטה מתאפסת.

$$f(\beta)=\det\left(\quad\right)=-4\beta^2\sinh(\beta)+4\beta\cosh\beta-\sinh(\beta).$$

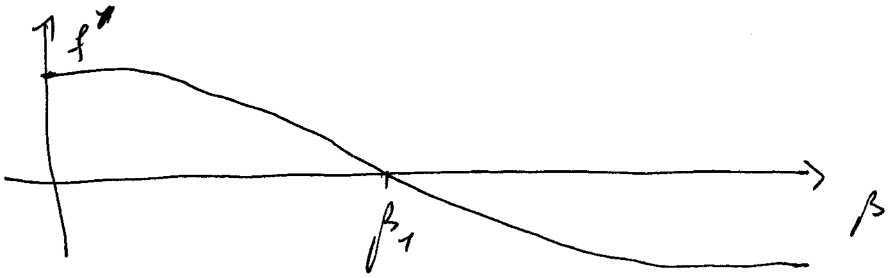
כעת, $f(0)=0$, $f(\infty)=-\infty$.

נבדוק את הנגזרת:

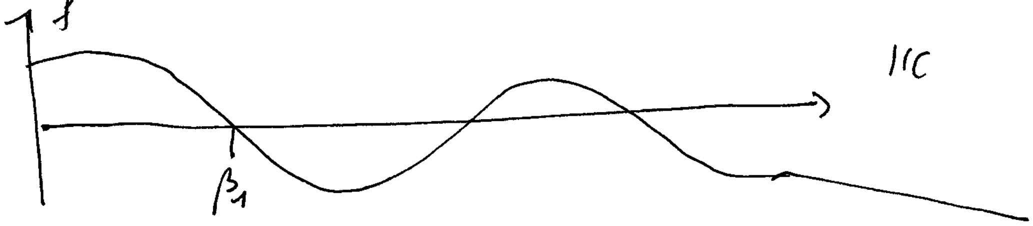
$$f'(\beta)=-4\beta\sinh(\beta)-4\beta^2\cosh(\beta)+3\cosh(\beta).$$

$f'(0)=3>0$, $f'(\infty)=-\infty$

נשרטט את הגרף של f'



או



בכל מקרה קיים $\beta_1>0$ כך ש $f'(\beta_1)=0$

הקטן ביותר

מכיוון ש $f(0)=0$ ו $f'(\beta)>0$ עבור $0<\beta<\beta_1$ אז
f מקבל מקסימום מקומי חיובי בנקודה β_1.
מכיוון ש $f(\infty)=-\infty$, אז חייבת להיות $\beta_1<\beta_0$
כך ש $f(\beta_0)=0$ ו $\lambda=-\beta_0^2$ ע"ע שלילי.

ב. על מנת לדעת התנהגות f צריך לחשב את f''.

$$f''(\beta) = -12\beta\cosh(\beta) - \sinh(\beta) - 4\beta^2\sinh(\beta) < 0$$

לכן ל f' יש רק אפס אחד ומכיוון גם
ל f יש רק שורש אחד.
כלומר יש רק ע"ע שלילי אחד.