

משוואות דיפרנציאליות חלקיות – 201006

מבחן סופי, מועד ב' תש"ע – 1.8.2010

מרצה: לביא קרפ

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

מספר סטודנט:

הוראות לנבחן:

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שעתיים (180 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר.
- יש לכתוב את התשובות בגוף השאלון במקום המיועד לכך. המחברות משמשות כטיוטה בלבד לא תיבדקנה.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש 6 שאלות (פותחות) שעליהן יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

סה"כ	6	5	4	3	2	1

השאלון

שאלה 1 (16 נק') נתונה בעיית התחלה

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0 \\ u(x, 0) = x \end{cases}$$

א. פתור את המשוואה.

ב. באיזה תחום של המישור הפתרון קיים.

תשובה:

שאלה 2 (16 נק') נתונה בעיית התחלה

$$(1) \quad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = P(x, t), & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x) \\ u_t(x, 0) = g(x) \end{cases}, \quad \text{in } \mathbb{R}$$

א. יהי u פתרון של בעיית ההתחלה (1) עם $f = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$ ו- $g \equiv 0$. $P(x, t) = t^{-1}$. חשב $u(3, 1)$ ו- $u(3, 3)$.

ב. יהי u פתרון של בעיית ההתחלה (1) עם $f = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$ ו- $g \equiv 0$.

$$P(x, t) = \begin{cases} t, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

חשב $u(3, 1)$ ו- $u(3, 3)$.

תשובה:

המשך התשובה:

שאלה 3 (16 נק') יהי u פתור את משוואת הדיפוסיה עם גורם "פזרנות" (dissipation)

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + bu = 0, & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(x), & \text{in } \mathbb{R} \end{cases}$$

כאשר $b > 0$ קבוע ו $|f(x)| \leq M$ לכל x .

א. הראה כי $u(x, t) = e^{-bt}v(x, t)$ כאשר $v(x, t)$ פתרון של משוואת החום $v_t - v_{xx} = 0$ עם אותו תנאי התחלה.

ב. הוכח כי $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$.

תשובה:

שאלה 4 (נק' 18) נניח כי u מקיים את משוואת הגל $u_{tt} - u_{xx} = 0$ בתחום $\{0 < x < \pi, 0 < t\}$ ועם תנאי שפה נוימן $u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0$. האנרגיה מוגדרת על ידי

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (u_t^2 + u_x^2) dx$$

א. הראה שהאנרגיה נשמרת, כלומר $E(t)$ אינו תלוי ב- t .

ב. חשב את האנרגיה $E(t)$ כאשר $u(x, 0) = 0$ ו $u_t(x, 0) = \cos x + 2 \cos 2x + 3 \cos 3x$.

הערה: $\int_0^\pi \cos^2(nx) dx = \frac{\pi}{2}$.

תשובה:

שאלה 5 (18 נק')

א. פתור את בעיית הערכים העצמיים המחזורית

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y(0) = y(1) \\ y'(0) = y'(1) \end{cases}.$$

ב. האם לפי הפתרון של סעיף א' קיימת סתירה למשפט שטורם ליוביל? נמק היטב את תשובתך!

תשובה:

המשך התשובה:

שאלה 6 (נק' 16) נסמן ב- B את הכדור $\{x^2 + y^2 < 4\}$, נניח כי $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$. תהי u פונקציה הרמונית בכדור B ועל השפה $\{x^2 + y^2 = 4\}$ נתון ש u שווה לפונקציה $|\sin 2\theta|$ (בקאורדינאטות קוטביות).

א. חשב $u(0, 0)$.

ב. האם קיימת נקודה (x_0, y_0) כך ש $x_0^2 + y_0^2 < 4$ ו $u(x_0, y_0) = 0$? נמק היטב את תשובתך!

תשובה: