משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

מבחן סופי, מועד א' תשע"א – 20.7.2010

מרצה: לביא קרפ

מספר סטודנט:

הוראות לנבחן:

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שעתיים (180 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר.
- יש לכתוב את התשובות בגוף השאלון במקום המיועד לכך. המחברות משמשות כטיוטה בלבד לא תיבדקנה.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש 6 שאלות (פותחות) שעליהן יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

1	2	3	4	5	6	סה"כ

שאלה 1 (15 נק') נתונה בעיית התחלה (משוואת העברה עם גורם דעיכה)

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = -u \\ u(x,0) = H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \end{cases}.$$

א. פתור את המשוואה. **רמז:** הצב $v(x,t) = e^t u(x,t)$.

ב. היכן הפתרון לא רציף במישור xt?

שאלה 2 (15 נק') יהי u פתרון של בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ \left.\begin{array}{l} u(x,0) = 10h(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{array}\right\}, & x \in \mathbb{R} \end{cases},$$

כשאר

$$h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}.$$

קבע היכן $u(x,t) = 1$.

שאלה 3 (15 נק') יהי u פתור את משוואת החום

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}, & x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

הוכח כי

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0.$$

רמז: הצב $v(x,t) = e^{t^2} u(x,t)$.

שאלה 4 (15 נק') נתונה בעיית שפה-התחלה עם תנאי שפה רובין:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty) \\ u_x(0,t) - a_0 u(0,t) = 0, & t \in [0,\infty) \\ u_x(1,t) + a_1 u(1,t) = 0, & t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0,1] \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

ועבור $t \geq 0$ נגדיר את אינטגרל האנרגיה

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)dx.$$

א. הראה שאם $a_0, a_1 \geq 0$, אז $E(t) \leq E(0)$.

ב. השתמש בסעיף א' על מנת להראות שאם $a_0, a_1 \geq 0$, אז הפתרון של בעיית שפה התחלה (1) יחיד.

שאלה 5 (25 נק') נתונה בעיית שפה-התחלה עם תנאי שפה דירכלה:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = \sin(\omega t)\sin x, & (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \in [0,\infty) \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

א. מצא את הפתרון לכל $\omega > 0$, $\omega \neq \sqrt{2}$.

ב. מצא את הפתרון עבור $\omega = \sqrt{2}$.

ג. באיזה מקרים הפתרון אינו חסום?

הערה: בצע את כל השלבים פרט לחישוב של ערכים ופונקציות עצמיות.

שאלה 6 (15 נק') נשתמש בסימונים הבאים: $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$-נקודה במישור, $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2$-נורמה ו $B_R = \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < R\}$-כדור ברדיוס R ו $C_R = \partial B_R = \{\mathbf{x} : x_1^2 + x_2^2 = R^2\}$-מעגל ברדיוס R.

<u>הראה את אי-שוויון הרנאק:</u> תהי u פונקציה הרמונית ב B_R, רציפה ואי-שלילית ב $\overline{B_R}$, אז

$$\frac{R - |\mathbf{x}|}{R + |\mathbf{x}|}u(0) \leq u(\mathbf{x}) \leq u(0)\frac{R + |\mathbf{x}|}{R - |\mathbf{x}|}.$$

רמז: השתמש בגרעין פואסון. אם f רציפה על במעגל C_R, אז פתרון בעיית דירכלה

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R \\ u = f & \text{on } C_R \end{cases}$$

ניתן על ידי

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi R}\int_{\{|\xi|=R\}} \frac{R^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \xi|^2} f(\xi)ds.$$