משוואות דיפרנציאליות חלקיות – 201006

מבחן סופי, מועד א' – 19.7.2010

מרצה: לביא קרפ

מספר סטודנט: ☐☐☐☐☐☐☐☐☐

הוראות לנבחן:

- כתוב מספר זהות
- משך הבחינה שלוש שעות (180 דקות).
- אין להשתמש בחומרי עזר.
- יש לכתוב את התשובות בגוף השאלון במקום המיועד לכך. המחברות משמשות כטיוטה בלבד לא תיבדקנה.
- נא לכתוב בעט ולא בעפרון.
- בבחינה יש 6 שאלות (פותחות) שעליהן יש להשיב תשובות מלאות ומנומקות היטב. תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד או שתקבל ניקוד חלקי בלבד.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

1	2	3	4	5	6	סה"כ

השאלון

שאלה 1 (12 נק') פתור בעיית התחלה

$$\left\{ \begin{array}{l} 2xu_x + u_y = 0 \\ u(x,0) = x^2 \end{array} \right. .$$

תשובה:

במקרה הזה פשוט יותר לקחת את x כפונקציה של y. משוואת הקווים האופייניים

$$\frac{dx}{dy} = 2x$$

לכן

$$x(y) = ce^{2y}$$

אז

$$c = xe^{-2y} .$$

פתרון כללי

$$u(x,y) = F(xe^{-2y}), \quad F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$$

נציב תנאי התחלה

$$x^2 = u(x,0) = F(x) .$$

תשובה: $u(x,y) = (xe^{-2y})^2$.

שאלה 2 (18 נק') נתונה בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0 \\ u(x,0) = x^3 \\ u_y(x,0) = 0 \end{cases}.$$

א. מאיזה סוג המשוואה?

ב. פתור את בעיית ההתחלה.

רמז: בצע שינוי משתנים: $\xi = 2x + y$, $\eta = x + y$.

תשובה:

א. $a=1$, $b=-3/2$ ו $c=2$. $ac-b^2 = 2-\frac{9}{4} < 0$

לכן המשוואה היא היפרבולית.

ב. נציב $u(x,y) = V(2x+y, x+y)$, כאשר $V = V(\xi,\eta)$

אז

$$u_{xx} = 4V_{\xi\xi} + 4V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}$$
$$u_{xy} = 2V_{\xi\xi} + 3V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}$$
$$u_{yy} = V_{\xi\xi} + 2V_{\xi\eta} + V_{\eta\eta}$$

אז

$$u_{xx} - 3u_{xy} + 2u_{yy} = -V_{\xi\eta} = 0$$

פעמיים אינטגרציה נותן $V(\xi,\eta) = A(\xi) + B(\eta)$,

כאשר $A,B : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$.

פתרון כללי $u(x,y) = A(2x+y) + B(x+y)$.

נציב את תנאי ההתחלה

$$\begin{cases} u(x,0) = A(2x) + B(x) = x^3 \\ u_y(x,0) = A'(2x) + B'(x) = 0 \end{cases}$$

המשך התשובה:

על מנת לפתור את המערכת, נגזור
את השורה הראשונה ונקבל

$$2A'(2x) + B'(x) = 3x^2$$
$$A'(2x) + B'(x) = 0$$

כך ניתן $A'(2x) = 3x^2$ | $B'(x) = -3x^2$

אז $A(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + C_1$ | $B(x) = -x^3 + C_2$

אז
$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+y}{2}\right)^3 - (x+y)^3 + C_1 + C_2$$

$u(x,0) = x^3$ נתון ש $C_1 + C_2 = 0$.

תשובה
$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 - (x+y)^3$$

שאלה 3 (18 נק') נתונה בעיית ערכים עצמיים

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y'(0) - a_0 y(0) = 0 \\ y'(1) + a_1 y(1) = 0 \end{cases}.$$

בקטע $[0,1]$ וכשאר הקבועים $a_0, a_1 \geq 0$.

א. הראה שאין ערכים עצמיים שליליים.

ב. נניח שלבעיית ערכים עצמיים הנ"ל יש הערך העצמי $\lambda = 0$. מהי הפונקציה העצמית של ערך עצמי $\lambda = 0$?

תשובה:

א. נניח כי $-y'' = \lambda y$, אזי

$$\lambda\langle y, y\rangle = \langle -y'', y\rangle = \int_0^1 -y''y\,dx =$$

$$= -y'y\Big|_0^1 + \int_0^1 (y')^2 dx$$

נחשב בנפרד

$$-y'y\Big|_0^1 = -y'(1)y(1) + y'(0)y(0) =$$
$$= a_1(y(1))^2 + a_0(y(0))^2$$

לסיכום

$$\lambda\langle y, y\rangle = a_1(y(1))^2 + a_0(y(0))^2 + \int_0^1 (y')^2 d \geq 0$$

ואם $\langle y, y\rangle > 0$ לכן $\lambda \geq 0$.

ב. אם $\lambda = 0$, אז צריך להתקיים ש $y' \equiv 0$, לכן כ"ע היא קבוע.

שאלה 4 (18 נק') עבור $r \geq 0$ ו- ω חיובי המשוואה **(1)** מייצגת תנודות של מיתר:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2ru_t - 9u_{xx} = \cos\omega t \sin x, & 0 < x < \pi, 0 \leq t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \leq t \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases} \qquad (1)$$

א. הראה שעבור $0 < r < 3$ המיתר חסום עבור $t \in [0,\infty)$ ולכל ω.

ב. כאשר $r = 0$, מצא עבור איזה ω המיתר חסום עבור $t \in [0,\infty)$.

ג. כאשר $r = 0$, מצא עבור איזה ω המיתר __אינו__ חסום עבור $t \in [0,\infty)$.

הערה: ניתן להשתמש בעובדה שהפתרון של בעיית הערכים העצמיים

$$\begin{cases} -X'' = \lambda X \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}$$

הוא ש- $\lambda_n = n^2$ ו- $X_n(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$.

תשובה:

אז. לפי תנאי השפה, נציג

$$u = \sum_{1}^{\infty} T_n X_n$$

כאשר $X_n = \sin(nx)$ | $\lambda_n = n^2$.

לכ

$$u_{tt} + 2ru_t - 9u_{xx} = \sum_{1}^{\infty}\left(T_n'' + 2rT_n + 9n^2T_n\right)X_n = \cos(\omega t)X_1$$

לכן

__$n=1$:__

$$T_1'' + 2rT_1' + 9T_1 = \cos(\omega t)$$

__$n=2$:__

$$T_n'' + 2rT_n' + 9n^2T_n = 0$$

פתרון כללי $n \geq 2$:

$$T_n = e^{-rt}\left(a_n \cos\left(\sqrt{9n^2 - r^2}\,t\right) + b_n \sin\left(\sqrt{9n^2 - r^2}\,t\right)\right)$$

__פתרון כללי $n=1$:__

$$T_1 = e^{-rt}\left(a_1 \cos\left(\sqrt{9n^2 - r^2}\,t\right) + b_1 \sin\left(\sqrt{9n^2 - r^2}\,t\right)\right) + T_p$$

כאשר T_p פתרון פרטי.

המשך התשובה:

כעת

אז

$$T_p = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

$$T_p'' + 2\Gamma T_p' + 9T_p =$$

$$= \cos(\omega t)\left[-\omega^2 A + 2\Gamma\omega B + 9A\right] + \sin(\omega t)\left[-\omega^2 B - 2\Gamma\omega A + 9B\right] = \cos(\omega t)$$

קיבלנו מערכת משוואות בנעלמים A ו B שנציג אותה בצורה מטריצית:

$$\begin{bmatrix} 9-\omega^2 & 2\Gamma\omega \\ -2\Gamma\omega & 9-\omega^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(\quad) = (9-\omega^2)^2 + 4\Gamma^2\omega^2 > 0$$

לכל $\Gamma>0$. מכאן ש $T_n(t)$ חסום לכל t

אז במקרה הזה הפתרון חסום.

ד. עבור גזה הפתרונות כמו בסעיף א' עם $\Gamma=0$.

עבור $n=1$, $T_1(t) = a_1\cos(3t) + b_1\sin(3t) + T_p$,

כאשר $(*)\quad T_p'' + 9T_p = \cos(\omega t)$

אז אם $\omega \neq 3$, $T_p = \frac{1}{\omega^2-9}\cos(\omega t)$

ולכן במקרה הזה הפתרונות חסומים

ה. כאשר $\omega=3$, אז $\cos(3t)$ פתרון של המשוואה ההומוגנית $(*)$. אז פתרון פרטי הינו מהצורה

$$T_p = At\sin(3t)$$

והינו לא חסום.

שאלה 5 (18 נק') נסמן ב- $R_T = \{0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$ ו-$R_\infty = \{0 \le x \le 1, 0 \le t < \infty\}$.

א. **נסח את עקרון המקסימום עבור** u **שהוא פתרון של משוואת החום** $u_t - u_{xx} = 0$ **ב-**R_T.

ב. **נניח כי** $u_1, u_2 \in C^2(\{0 < x < 1, 0 < t\}) \cap C(R_\infty)$ **הם פתרונות של משוואת החום** $u_t - u_{xx} = P(x,t)$ **ב-**$\{0 < x < 1, 0 < t\}$ **אשר מקיימים את התנאים הנילווים:**

$$\begin{cases} u_i(0,t) = a_i(t), & 0 \le t \\ u_i(1,t) = b_i(t), & 0 \le t \\ u_i(x,0) = f_i(x), & 0 \le x \le 1 \end{cases}, \qquad i = 1, 2.$$

הראה שאם $a_1(t) \le a_2(t)$, $b_1(t) \le b_2(t)$ **ו** $f_1(x) \le f_2(x)$, **אז** $u_1(x,t) \le u_2(x,t)$ **ב** R_∞.

תשובה:

א. נגדיר תחילה את השפה הפרבולית:

$\partial_p R_T = \partial R_T \setminus \{0 < x \le 1, t = T\} =$

$= \{x = 0, 0 \le t \le T\} \cup \{0 \le x \le 1, t = 0\} \cup \{x = 1, 0 \le t \le T\}$

עקרון המקסימום למשוואת החום:

(i) $u \in C^2(R_T \setminus \partial_p R_T) \cap C(R_T)$

(ii) $u_t - u_{xx} = 0$ ב $R_T \setminus \partial_p R_T$.

אז $\max_{R_T} u = \max_{\partial_p R_T} u$.

נגדיר $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. אז לכל $0 < T$

$u_t - u_{xx} = 0$ ב- $R_T \setminus \partial_p R_T$

וגם $u \in C^2(R_T \setminus \partial_p R_T) \cap C(R_T)$

לכן $\max_{R_T} u = \max_{\partial_p R_T} u$.

אבל לפי הנתון $\max_{\partial_p R_T} u \le 0$. לכן $u \le 0$ ב R_T לכל T.

כעת נשאיף את T לאינסוף ונקבל $u \le 0$ ב-R_∞

שאלה 6 (16 נק') יהי Ω תחום במרחב $\mathbb{R}^3$.

א. נסח את זהות גרין הראשונה בתחום Ω.

ב. השתמש בזהות גרין הראשונה להראות יחידות בעיית רובין

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + au = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

כאשר $a > 0$.

תשובה:

א. נניח $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$.

אז

$$\iiint_{\Omega} (v\Delta u + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v) dx = \iint_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) ds$$

כאשר η נורמל היחידה בכיוון החיצוני.

ב. נניח כי יש שני פתרונות u_1 ו u_2. נגדיר $w = u_1 - u_2$.

אז $\Delta w = 0$ ב Ω. כעת נשתמש בזהות גרין עם $v = u = w$. אז

$$\iiint_{\Omega} |\vec{\nabla} w|^2 dx = \iint_{\partial\Omega} \left(w \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) ds$$

$$= -a \iint_{\partial\Omega} w^2 ds$$

(שימו לב שעל השפה, $\frac{\partial w}{\partial \eta} = -aw$).

מכיוון ש $a > 0$, השוויון מעלה מתקיים רק כאשר $w \equiv 0$, כלומר $u_1 = u_2$.