# מיון משוואות מסדר שני ושינוי משתנים

1. אפיין את המשוואות הבאות:

א. $u_{xx} - 5u_{xy} = 0$; ב. $4u_{xx} - 12u_{xy} + 9u_{yy} + u_y = 0$;
ג. $u_{xx} - u_{xy} + u_{yy} + 2u_y + 4u = 0$.

2. קבע באלו תחומים המשוואה

$$(1 + x^2)u_{xx} - 2yu_{xy} + u_{yy} - 3u_x + u = 0$$

אליפטית, היפרבולית ופרבולית. שרטט את התחומים.

3. נתונה המשוואה

$$u_{xx} + u_{yy} + cu = 0, \tag{1}$$

כאשר $c$ קבוע. הראה שהמשוואה $(1)$ אינה משתנה תחת העתקות:

א.

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

ב.

$$\begin{cases} \xi = x - x_0 \\ \eta = y - y_0 \end{cases}$$

ג. מה המסקנה?

הראה שמשלושת המשוואות הבאות רק

4. מצא מאיזה סוג המשוואה

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$$

והראה שפתרון כללי שלה הוא ניתן על ידי
$u(x,y) = xA(2x + y) + B(2x + y)$, כאשר $A$ ו $B$ פונקציות של משתנה אחד.

5. נתונה המשוואה

$$u_{xx} + \frac{10}{3}u_{xy} + u_{yy} = 0 \tag{2}$$

א. מצא שינוי משתנים $\xi = ax + by$, $\eta = cx + dy$,
$u(x,y) = V(ax+by, cx+dy)$ כך שבמשתנים החדשים המשוואה $(2)$ שקולה למשוואה

$$KV_{\xi\eta} = 0,$$

כאשר $K$ קבוע מסיום. **רמז:** $x^2 + \frac{10}{3}xy + y^2 = (x + \frac{1}{3}y)(x + 3y)$.

ב. מצא פתרון כללי של המשוואה $(2)$.

6. מצא פתרון למשוואות הבאות:

א. $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}=e^{y}$;

ב. $u_{xx}+5u_{xy}+4u_{yy}=0$.

7. נתונה המשוואה

$$u_{xx}+cu_{yy}=0,$$

כאשר $c$ הוא קבוע. מצא את סוג המשוואה ושרטט את הקווים האופייניים עבור $c=-4,-1,-\frac{1}{100},0,1$.

8. נתונה משוואה מסדר שני ב-$\mathbb{R}^n$ ועם מקדמים קבועים

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n} a_iu_{x_i}+a_0u=0\ , \tag{3}$$

כאשר $a_{ij}=a_{ji}$. נבצע שינוי משתנים $\xi=Bx$, כאשר $B$ מטריצה $n\times n$, כלומר $\xi_i=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j$ ונציב $u(x)=v(Bx)$.

א. הראה

$$u_{x_i}=\sum_{l=1}^{n} v_{\xi_j}b_{jl}$$

או בצורה מטריציונית

$$\begin{bmatrix}\partial_{x_1}\\ \vdots\\ \partial_{x_n}\end{bmatrix}=B^T\begin{bmatrix}\partial_{\xi_1}\\ \vdots\\ \partial_{\xi_n}\end{bmatrix}. \tag{4}$$

ב. הראה ש

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j}=\begin{bmatrix}\partial_{x_1} & \cdots & \partial_{x_n}\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}\partial_{x_1}\\ \vdots\\ \partial_{x_n}\end{bmatrix}, \tag{5}$$

כאשר $A=(a_{ij})$. הסק מ $(4)$ ו $(5)$ ש-

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j}=\begin{bmatrix}\partial_{\xi_1} & \cdots & \partial_{\xi_n}\end{bmatrix}BAB^T\begin{bmatrix}\partial_{\xi_1}\\ \vdots\\ \partial_{\xi_n}\end{bmatrix}. \tag{6}$$

ג. הראה שקיימת מטריצה $B$ כך ש $BAB^T=\begin{bmatrix}d_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & d_n\end{bmatrix}$ ולכן מ- $(6)$ נקבל

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j}=\sum_{k=1}^{n} d_kv_{\xi_k\xi_k}.$$

**הערה:** המשוואה $(3)$ אליפטית אם כל ה-$d_k$ חיובים או שלילים; המשוואה $(3)$ הפרבולית אם קיים $d_{k_0}$- אחד שהסימן שלו שונה מהסימן של שאר ה $d_k$- וכל ה $d_k$- שונים מאפס.

**רמז:** המטריצה $A = (a_{ij})$ סימטרית ולמטריצות סמטריות יש ליכסון אורתוגונלי.

## תשובות

**1** א. היפרבולי; ב. פרבולי; ג. אלפטי.

**2** אליפטי $x^2 - y^2 > -1$; היפרבולי $x^2 - y^2 < -1$; פרבולי $x^2 - y^2 = -1$.

**5** א. $\xi = 3x - y$, $\eta = -x + 3y$.

**6** א. $\frac{1}{4}e^y + xA(2x + y) + B(2x + y)$, $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
ב. $A(4x - y) + B(y - x)$, $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.