אוסף תרגילים במשוואות דיפרנציאליות חלקיות
201006
לביא קרפ

מכללת אורט בראודה, המחלקה למתמטיקה

ערכים עצמיים, פונקציות עצמיות ותורת שטורם-ליוביל

הגדרות וסימונים

- מכפלה פנימית עבור פונקציות רציפות למקוטעין בקטע $[0, L]$: $\langle f, g\rangle = \int_0^L f(x)g(x)dx$

תרגילים

1. מצא ערכים עצמיים ופונקציות עצמיות.

א.
$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y'(0) = 0,\ \ Y'(1) = 0 \end{cases}$$

ב.
$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y(0) = 0,\ \ Y'(1) = 0 \end{cases}$$

ג.
$$\begin{cases} -(Y'' - 2Y' + Y) = \lambda Y \\ Y(0) = 0,\ \ Y(1) = 0 \end{cases}$$

ד.

$$\begin{cases} -(x^2Y'' + xY') = \lambda Y, & 1 \le x \le e \\ Y(1) = 0,\ \ Y'(e) = 0 \end{cases}$$

רמז: השתמש בשינוי המשתנה $t = \ln x$.

2. נתונה בעיית ערכים עצמיים (שטורם-ליוביל)

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y(0) + 2Y'(0) = 0,\ \ Y'(1) = 0 \end{cases}$$

א. הראה שקיים ערך עצמי שלילי אחד בלבד.

ב. האם $\lambda = 0$ ערך עצמי?

ג. מצא את הנוסחה עבור הערכים העצמיים החיובים והסבר מדוע בכל קטע $(n\pi, (n+1)\pi)$ יש שורש של ערך עצמי אחד, $n = 0, 1, 2, ...$. מה הן הפונקציות העצמיות?

3. נתונה בעיית ערכים עצמיים (שטורם-ליוביל)

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y(0) + Y'(0) = 0,\ \ Y(1) = 0 \end{cases} .$$

א. האם קיימים ערכים עצמיים שליליים?

ב. האם $\lambda = 0$ ערך עצמי? אם כן, מה היא הפונקציה העצמית?

ג. הראה שקיימים אינסוף ערכים עצמיים חיובים. מצא את הנוסחה עבור הערכים העצמיים החיובים. מה הן הפונקציות העצמיות?

4. הראה שלבעיית ערכים עצמיים (שטורם-ליוביל)

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y'(0) + Y(0) = 0,\ \ Y'(1) - Y(1) = 0 \end{cases}$$

יש בדיוק ערך עצמי שלילי אחד.

5. נתונה בעיית ערכים עצמיים (שטורם-ליוביל)

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y'(0) - Y(0) = 0 \\ Y'(1) + 2Y(1) = 0 \end{cases} . \tag{1}$$

א. הראה שלבעיה (3) לא קיימים ערכים עצמיים שליליים.

ב. מצא את הנוסחה עבור הערכים העצמיים החיובים והסבר מדוע בכל קטע $(n\pi, (n+1)\pi)$ יש שורש של ערך עצמי אחד, $n = 0, 1, 2, ...$.

6. הראה שלבעיית בעיית ערכים עצמיים

$$\begin{cases} -Y'' = \lambda Y \\ Y(0) = Y(1), \;\; Y'(0) = Y'(1) \end{cases}$$

יש ערכים עצמיים

$$\lambda_0 = 0 \qquad n = 1, 2, 3, ... \quad \lambda_n = (2n\pi)^2,$$

ופונקציות עצמיות

$$Y_0 = a_0 \qquad n = 1, 2, 3, ... \quad Y_n(x) = a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x).$$

האם יש סתירה לתורת שטורם-ליוביל?

תנאי שפה רובין

תנאי השפה

$$\begin{cases} Y'(0) - a_0 Y(0) = 0 \\ Y'(L) + a_L Y(L) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

נקראים תנאי שפה רובין. בסעיף זה נדון בהיבטים של התנאי הזה עבור המשוואה $Y'' = -\lambda Y$.

7. הראה ש $\lambda = 0$ ערך עצמי אם ורק אם $a_0 + a_L = -a_0 a_L L$ ומצא את הפונקציה העצמית.

8. הראה שהערכים השליליים נקבעים על ידי המשוואה

$$\tanh(\beta L) = -\frac{(a_0 + a_L)\beta}{\beta^2 + a_0 a_L}, \qquad \textbf{(3)}$$

כאשר $\lambda = -\beta^2$.

9. השתמש במשוואה (3) בכדי לחקור את הערכים העצמיים השליליים של תנאי רובין:

א. הראה שאם $a_0, a_l \geq 0$, אז אין ערכים עצמיים שליליים.

ב. הראה שאם $a_0 + a_L > 0$ ו $a_0 a_L < 0$, אז קיים ערך עצמי שלילי אחד רק בתנאי ש $a_0 + a_L < -a_0 a_L L$.

ג. הראה שאם $a_0, a_L < 0$ ו $-(a_0 + a_L) < a_0 a_L L$, אז יש שני ערכים עצמיים שליליים.
רמז: הראה שהמקסימום של צד ימין של (3) גדול או שווה לאחד.

ד. הראה שאם $a_0, a_L < 0$ ו $-(a_0 + a_L) \geq a_0 a_L L$, אז יש ערך עצמי שלילי אחד.

10. תהי p גזירה וחיובית בקטע $[0,1]$ ו q רציפה. הראה שאם $a_0, a_1 \geq 0$ ו $q(x) \geq 0$ בקטע $[0,1]$, אז לבעיית ערכים עצמיים

$$-\left(pY'\right)' + qY = \lambda Y$$

עם תנאי שפה רובין **(2)** אין ערכים עצמיים שליליים.
רמז: יהי Y פונקציה עצמית עם ערך עצמי λ, הראה

$$\lambda\langle Y, Y\rangle = \left(\left(a_1 Y^2(1) + a_0 Y^2(0)\right) + \int_0^1 \left((Y')^2 + q(x)Y^2\right) dx \qquad \textbf{(4)}\right.$$

והסק מ **(4)** ש $\lambda \geq 0$.

תכונות של פונקציות עצמיות

11. יהי

$$L[Y] = -\left(pY'\right)' + qY \qquad \textbf{(5)}$$

אופרטור דיפרנציאלי, כאשר p גזירה וחיובית בקטע $[0,1]$ ו q רציפה בקטע $[0,1]$. שימו לב שכאשר $p \equiv 1$ ו $q \equiv 0$, אז $L[Y] = -Y''$. בתרגיל זה נלמד כמה תכונות של פונקציות עצמיות של האופרטור L עם תנאי השפה שטורם–ליוביל

$$\begin{cases} \alpha Y(0) + \beta Y'(0) = 0, & \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \\ \gamma Y(1) + \delta Y'(1) = 0, & \gamma^2 + \delta^2 \neq 0 \end{cases} . \qquad \textbf{(6)}$$

א. הראה (באמצעות אינטגרציה בחלקים) את זהות גריין השנייה

$$\int_0^1 \left(L[Y_1]Y_2 - Y_1 L[Y_2]\right) dx = \left(p\left((Y_1 Y_2' - Y_1' Y_2\right)\right) |_0^1 .$$

ב. הראה שאם Y_1 ו Y_2 מקיימות את תנאי השפה **(6)**, אז

$$\left(p\left((Y_1' Y_2 - Y_1 Y_2'\right)\right) |_0^1 = 0.$$

רמז: ניתן להניח ש $\beta \neq 0$ ו $\delta \neq 0$ ואז מתנאי השפה **(6)** נקבל ש $Y_i'(0) = \frac{\alpha}{\beta} Y_i(0)$ ו $Y_i'(1) = \frac{\gamma}{\delta} Y_i(1)$, $i = 1, 2$.

ג. הראה שאם $L[Y_1]=\lambda_1 Y_1$, $L[Y_2]=\lambda_2 Y_2$ ו $\lambda_1\neq\lambda_2$, אז

$$\langle Y_1,Y_2\rangle=\int_0^1 Y_1Y_2dx=0.$$

רמז: השתמש בסעיפים א' ו ב' להראות $\lambda_1\langle Y_1,Y_2\rangle=\lambda_2\langle Y_1,Y_2\rangle$. הסק משיוויון זה שאם $\lambda_1\neq\lambda_2$, אז $\langle Y_1,Y_2\rangle=0$.

מסקנה: אם Y_1 ו Y_2 פונקציות עצמיות של האופרטור (5) עם תנאי שפה שטורם ליוביל (6), λ_1 ו λ_2 ערכים עצמיים בהתאמה ו $\lambda_1\neq\lambda_2$, אז Y_1 ו Y_2 אורתוגונליות.

ד. **הוורסקיאן** של שתי פונקציות Y_1 ו Y_2 מוגדר על ידי

$$W(Y_1,Y_2)(x)=\det\begin{bmatrix} Y_1(x) & Y_2(x)\\ Y_1'(x) & Y_2'(x)\end{bmatrix}.$$

מהתורה של משוואות דיפרנציאליות רגילות ידוע שאם $L[Y_1]=\lambda Y_1$ ו $L[Y_2]=\lambda Y_2$, אז $W(Y_1,Y_2)(x)=p(x)$ (נוסחת אבל). השתמש בזאת על מנת להראות שאם $L[Y_1]=\lambda Y_1$ ו $L[Y_2]=\lambda Y_2$ והפונקציות Y_1 ו Y_2 מקימות את תנאי השפה (6) , אז $Y_2(x)=CY_1(x)$.

מסקנה: לכל ערך עצמי של בעיית שטורם ליוביל יש, עד כדי קבוע, פונקציה עצמית אחד בלבד.

תשובות

1 א. ערכים עצמיים: $\lambda_n=(n\pi)^2$, $n=0,1,2,...$, פונקציות עצמיות $Y_0\equiv 1$, $Y_n(x)=\cos((n\pi)x)$, $n=1,2,...$.

ב. ערכים עצמיים $\lambda_n=(\frac{\pi}{2}+n\pi)^2$, פונקציות עצמיות: $Y_n(x)=\sin((\frac{\pi}{2}+n\pi)x)$, $n=0,1,2,...$.

ג. ערכים עצמיים: $\lambda_n=(n\pi)^2$, פונקציות עצמיות: $Y_n(x)=e^x\sin((n\pi)x)$, $n=1,2,...$.

ד. ערכים עצמיים: $\lambda_n=(\frac{\pi}{2}+n\pi)^2$, פונקציות עצמיות: $Y_n(x)=\sin((\frac{\pi}{2}+n\pi)\ln x)$, $n=0,1,2,...$.

2 א. ערך עצמי שלילי $\lambda_0=-\beta_0^2$, כאשר β_0 פתרון של המשוואה $\cosh\beta-2\beta\sinh\beta=0$

ב. לא!

ג. $\sqrt{\lambda_n}=-\frac{1}{2}\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}}{\sin\sqrt{\lambda_n}}$, $Y_n(x)=-2\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}x)+\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$, $n=1,2,...$

3 א. לא, ב. כן! $1-x$ פונקציה עצמית,

ג. $\sqrt{\lambda_n}=\tan\sqrt{\lambda_n}$, $Y_n(x)=-\sqrt{\lambda_n}\cos(\sqrt{\lambda_n}x)+\sin(\sqrt{\lambda_n}x)$, $n=0,1,2,...$

5 ב. נציב $\beta=\sqrt{\lambda}$. פתרון כללי של המשוואה הדיפרנציאלית הרגילה: $Y(x)=A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)$. תנאי השפה בנקודה $x=0$ נותן:

$$\beta B-A=0. \tag{7}$$

התנאי בנקודה $x=1$ נותן

$$\beta\left(-A\sin\beta+B\sin\beta\right)+2\left(A\cos\beta+B\sin\beta\right)=0 \tag{8}$$

וכאשר נציב ב **(8)** $A=\beta B$ נקבל

$$(-\beta^2+2)\sin\beta+3\beta\cos\beta=0 \tag{9}$$

או

$$(\beta-\frac{2}{\beta})=-3\cot\beta. \tag{10}$$

הפונקציה $\beta-\frac{2}{\beta}$ עולה בקטע $(0,\infty)$, $\lim_{\beta\to 0^-}(\beta-\frac{2}{\beta})=-\infty$ ו $\lim_{\beta\to\infty}(\beta-\frac{2}{\beta})=\infty$. ואילו לפונקציה $-3\cot\beta$ יש אסימפטוטות אנכיות בקצוות הקטע $(n\pi,(n+1)\pi)$. לפיכך, בכל קטע הגרפים נחתכים ונקודת החיתוך היא השורש הריבועי של הערך העצמי.