# אוסף תרגילים במשוואות דיפרנציאליות חלקיות

201006

לביא קרפ

**מכללת אורט בראודה**

**המחלקה למתמטיקה**

## שיטת הפרדת המשתנים

### תרגילים

1. פתור את בעיית שפה התחלה באמצעות הפרדת משתנים.

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, 0 < t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \leq t \\ u(x,0) = \sin x - 4\sin(3x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u_t(x,0) = -7\sin(2x), & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

2. יהי $u$ פתרון של בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_t - 8u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, 0 < t \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & 0 \leq t \\ u(x,0) = 1 + \cos 2x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}.$$

א. חשב את $u(x,t)$.

ב. חשב $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$. מה המשמעות הפיסקלית?

3. יהי $u$ פתרון של בעיית שפה התחלה של משוואת החום עם גורם פיזור

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} + bu = 0, & 0 < x < \pi, 0 < t \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & 0 \leq t \\ u(x,0) = 1 + \sum_{n=1}^{10} n\cos nx, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases},$$

כאשר $b > 0$.

א. חשב את $u(x,t)$.

ב. חשב $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$.

4. נתונה בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+\pi^2u=0, & 0<x<1, 0<t \\ u(0,t)=u(1,t)=0, & 0\le t \\ u(x,0)=f(x), & 0\le x\le 1 \\ u_t(x,0)=g(x), & 0\le x\le 1 \end{cases}.$$

א. מצא פתרון כללי.

ב. חשב את הנוסחאות למקדמי פורייה של $f$ ו $g$.

5. נתונה הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & 0<x<L, 0<t \\ u(0,t)=u(L,t)=0, & 0\le t \\ u(x,0)=f(x), & 0\le x\le L \\ u_t(x,0)=g(x), & 0\le x\le L \end{cases}.$$

א. חשב פתרון כללי (כלומר כתוב את הפתרון כטור אינסופי ללא חישוב המקדמים $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$).

ב. מהו התדר (התוו) היסודי?

ג. הסבר מדוע התוו שנוצר ממיתר של כינור עולה בדיוק באוקטבה כאשר המיתר מהודק בדיוק באמצע (כלומר, מהו התוו היסודי במקרה הזה).

6. יהי $u$ פתרון של בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & 0<x<\pi, 0<t \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0, & 0\le t \\ u(x,0)=(x-\frac{\pi}{2})^2, & 0\le x\le \pi \\ u_t(x,0)=0, & 0\le x\le \pi \end{cases}.$$

חשב $u(\frac{\pi}{2},\frac{1}{10})$.

7. מצא את הטמפרטורה של מוט באורך $\pi$, שמבודד בקצוות המוט ועם טמפרטורה התחלתית $x(\pi-x)$.

8. השתמש בהפרדת משתנים בכדי להראות שלבעיית שפה התחלה $tu_t-u_{xx}-2u=0$, $u(0,t)=u(L,t)=0$ ו $u(x,0)=0$, $0\le x\le L$ , יש אינסוף פתרונות. לפיכך, היחידות אינה מתקיימת עבור המשוואה הזו.

9. נתונה של בעיית שפה התחלה של מיתר מרוסן

$$\begin{cases} u_{tt}+2au_t-c^2u_{xx}=0, & 0<x<\pi, 0<t \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & 0\leq t \\ u(x,0)=f(x), & 0\leq x\leq\pi \\ u_t(x,0)=g(x), & 0\leq x\leq\pi \end{cases}.$$

מצא פתרון פורמלי כאשר

א. $0<a<c$.

ב. $c<a<2c$.

10. נתונה בעיית שפה התחלה עם תנאי שפה מעורבים

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & 0<x<\pi, 0<t \\ u_x(0,t)=u(\pi,t)=0, & 0\leq t \\ u(x,0)=f(x), & 0\leq x\leq\pi \\ u_t(x,0)=g(x), & 0\leq x\leq\pi \end{cases}.$$

א. הראה ש $\cos\left((n+\frac{1}{2})x\right)$, $n=0,1,2,\ldots$ הן פונקציות עצמיות.

ב. חשב את הפתרון הפורמלי.

11. נתונה בעיית שפה התחלה

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & 0<x<\pi, 0<t \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0, & 0\leq t \\ u(x,0)=\begin{cases} 1, & \frac{\pi}{2}\leq x\leq\pi \\ 0, & 0\leq x<\frac{\pi}{2} \end{cases} \end{cases}.$$

א. מצא פתרון פורמלי של $u$.

ב. הראה שעבור $t>0$ הפתרון $u$ רציף.

ג. הראה שעבור $t>0$ הנגזרות החלקיות מסדר ראשון רציפות.

ד. הסבר מדוע $u\in C^\infty$ עבור $t>0$.

12. פתור את הבעיה הבאה באמצעות עקרון דוהמאל (Duhamel):

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=F(x), & 0<x<\pi, 0<t \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0, & 0<t \\ u(x,0)=0, & 0\leq x\leq\pi \end{cases}.$$

א. הראה שהפתרון לבעיה המקורית ניתן על ידי

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t,s)ds,$$

כאשר

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = 0, & 0<x<\pi, s<t \\ v(0,t,s)=v(\pi,t,s)=0, & s\le t \\ v(x,s,s)=F(x), & 0\le x\le\pi \end{cases}.$$

ב. מצא פתרון פורמלי של $v(x,t,s)$.

ג. מצא פתרון פורמלי של $u(x,t)$.

13. נניח כי $u$ מקיימת את משוואת הגל בתחום $\{0<x<\pi, 0<t\}$. נגדיר את אינטגרל האנרגיה

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(u_t^2+c^2u_x^2\right)dx. \qquad \textbf{(1)}$$

א. הראה שבתנאי שפה דירכלה האנרגיה נשמרת, כלומר $E(t)$ לא תלוי ב $t$.

ב. הראה שבתנאי שפה נוימן האנרגיה נשמרת.

ג. השתמש באינטגרל האנרגיה על מנת להראות את היחידות הפתרון של בעיית דירכלה וניומן.

## תשובות

1 $u(x,t) = \cos 2t \sin x - 4\cos 6t \sin 3x - \frac{7}{4}\sin 4t \sin 2x$

2 $u(x,t) = 1 + 2e^{-32t}\cos 2x$

3 א. $u(x,t) = e^{-bt} + \sum_{n=1}^{10} ne^{-(3n^2+b)t}\cos nx$.

ב. $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$.

4 א. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\pi\sqrt{n^2+1}t\right) + b_n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}t\right)\right)\sin(\pi n x)$.

ב. $a_n = 2\int\limits_0^1 f(x)\sin(\pi n x)dx$, $b_n = \frac{2}{\pi\sqrt{n^2+1}}\int\limits_0^1 g(x)\sin(\pi n x)dx$.

5 א. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right) + b_n\cos\left(\frac{n\pi ct}{L}\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$.

ב. $\frac{\pi c}{L}$.

ג. אם אורך המיתר מתקצר בדיוק בחצי, כלומר $L \to \frac{L}{2}$, אז התוו היסודי $\frac{\pi c}{L} \to \frac{\pi c}{L/2} = \frac{2\pi c}{L}$ וזה המשמעות של עלייה באוקטבה.

7 נסמן ב $u(x,t)$ את הטמפרטורה:

$$u(x,t) = \frac{\pi}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n+1}{n^2}e^{-(kn^2t)}$$

9 א.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-at}\left(a_n\cos\left(\sqrt{c^2n^2-a^2}t\right) + b_n\sin\left(\sqrt{c^2n^2-a^2}t\right)\right)\sin(nx),$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx \qquad , -aa_n + b_n\sqrt{c^2n^2-a^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(nx)dx$$

ב.

$$u(x,t) = e^{-at}\left(a_1\cosh\left(\sqrt{a^2-c^2}t\right) + b_1\sin\left(\sqrt{a^2-c^2}t\right)\right)\sin(x),$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty} e^{-at}\left(a_n\cos\left(\sqrt{c^2n^2-a^2}t\right) + b_n\sin\left(\sqrt{c^2n^2-a^2}t\right)\right)\sin(nx)$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(x)dx, \qquad , -aa_1 + b_1\sqrt{a^2-c^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(nx)dx$$

ועבור $n \geq 2$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(nx)dx \qquad , -aa_n + b_n\sqrt{c^2n^2-a^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(nx)dx$$

**10** ב.

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n\cos(c(n+\frac{1}{2})t)+b_n\sin(c(n+\frac{1}{2})t)\right]\cos\left((n+\frac{1}{2})x\right),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos((n+\frac{1}{2}))dx,\qquad b_n\left(c(n+\frac{1}{2})\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(x)\cos((n+\frac{1}{2}))dx.$$

**11** א. $u(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}e^{-n^2t}\cos(nx)$

**12** ב. $v(x,t,s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-n^2(t-s)}\sin(nx)$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\sin(nx)dx$

ג. $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1-e^{-n^2t}}{n^2}\sin(nx)$, $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}F(x)\sin(nx)dx$