אוסף תרגילים במשוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

לביא קרפ

מכללת אורט בראודה, המחלקה למתמטיקה

שיטת הפרדת המשתנים - משוואות לא הומוגניות

תרגילים

1. פתור את בעיית שפה התחלה של משוואת הגל באמצעות הפרדת משתנים.

א.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = t\cos x, & 0 < x < \pi, 0 \le t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin x, & 0 < x < \pi, 0 \le t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ג.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \pi - x, & 0 < x < \pi, 0 \le t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \\ u(x,0) = x(\pi - x), & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

ד.

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin 2t \sin x, & 0 < x < \pi, 0 \le t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \\ u(x,0) = 5\sin 5x, & 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

2. יהי u פתרון של בעיית שפה התחלה המשוואה (1) שמייצגת תנודות של מיתר:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin\omega t \sin 2x, & 0 < x < \pi, 0 \le t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases} \quad . \tag{1}$$

א. פתור את המשוואה (1) עבור כל ערך של ω

ב. עבור איזה ערך של ω המיתר שמיוצג על ידי המשוואה (1) נמצא במצב של תהודה?

3. המשוואה (2) מייצגת תנודות של מיתר:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \sin\omega t, & 0 < x < \pi, 0 \le t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases} \quad . \tag{2}$$

א. פתור את המשוואה (2) עבור $0 < \omega < 1$

ב. פתור את המשוואה (2) עבור $\omega = 1$. האם הפתרון חסום עבור $\{t \ge 0\}$, או האם המיתר במצב של תהודה כאשר $\omega = 1$?
רמז: ניתן לעשות זאת בשתי שיטות: 1.) להשתמש בהפרדת משתנים ולחזור על תהליך דומה לסעיף א'. 2.) נסמן ב $u(x,t,\omega)$ את הפתרון למשוואה (2) עם $0 < \omega < 1$ ונחשב $\lim_{\omega\to 1} u(x,t,\omega)$.

4. המשוואה (3) מייצגת תנודות של מיתר עם חיכוך:

$$\begin{cases} u_{tt} + 2au_t - 2u_{xx} = \sin\omega t \sin x, & 0 < x < \pi, 0 \le t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \le x \le \pi \end{cases} \quad , \tag{3}$$

כאשר התדר ω מספר ממשי וחיובי.

א. הראה שעבור $0 < a \le 1$ המיתר אינו נמצא במצב של תהודה, כולמר הפתרון חסום עבור $t \ge 0$.

ב. כאשר $a = 0$, מצא עבור איזה ω המיתר במצב של תהודה.
רמז: על מנת לענות על סעיפים א' ו ב' אין צורך לחשב את כל המקדמים.

מסקנה: משוואת הגל עם ריסון ($a > 0$) לא נמצאת במצב תהוודה עבור כל ω ממשי.

5. פתור את בעיית שפה התחלה של משוואת החום באמצעות הפרדת משתנים.

א.

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi, 0 \leq t \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 4, & 0 \leq t \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

ב.

$$\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = \sin x, & 0 < x < \pi, 0 \leq t \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 1, & 0 \leq t \\ u(x,0) = 1 + x + \sin 3x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

ג.

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 2\frac{xt}{\pi}, & 0 < x < \pi, 0 \leq t \\ u(0,t) = t, u(\pi,t) = t^2, & 0 \leq t \\ u(x,0) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

תשובות

1 א. $u(x,t) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\pi n^3(n^2-1)} \left(-\sin(nt) + t\right) \sin(nx)$

ב. $u(x,t) = (-\cos t + 1) \sin x$

ג. $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{\pi n^3} \left((2(1-(-1^n)) - 1) \cos nt + 1\right) \sin nx$

ד. $u(x,t) = \dfrac{2}{3} (\sin t - \sin 2t) \sin x + 5 \cos 5t \sin 5t$

2 א.

<u>$\omega \neq 2$:</u>

$$u(x,t) = \frac{1}{4-\omega^2} \left(-\frac{\omega}{2} \sin(2t) + \sin(\omega t)\right) \sin(2x)$$

<u>$\omega = 2$:</u>

$$u(x,t) = (\sin(2t) - 2t\cos(2t)) \frac{\sin(2x)}{8}$$

ב. $\omega = 2$

3 **(פתרון מלא):**

א. נעשה הפרדת משתנים

$u = \sum X_n(x) T_n(t)$, כאשר X_n פתרון פתרון של בעיית שטורם ליוביל:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases}.$$

אז

$$\lambda_n = n^2, \;\; X_n(x) = \sin(nx), \;\; n = 1, 2, 3, ...$$

ו

$$u_{tt} - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'' + n^2 T_n\right) X_n = \sin(\omega t) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) X_n,$$

כאשר

$$p_n(t) = \frac{2}{\pi} \langle \sin(\omega t), X_n \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(\omega t) \sin(nx) dx = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin(\omega t).$$

כעת לכל n,

$$T_n'' + n^2 T_n = \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n} \sin(\omega t).$$

פתרון המשוואה: מכיוון ש $0 < \omega < 1$, אז

$$T_n(t) = a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) + \left(\frac{2}{n^2 - \omega^2}\right) \left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\right) \sin(\omega t).$$

פתרון כללי:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) + \left(\frac{2}{n^2-\omega^2}\right) \left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\right) \sin(\omega t)\right) \sin(nx).$$

נציב תנאי התחלה:

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)\sin(nx)=0$$

ו

$$.u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(nb_n+\left(\frac{2\omega}{n^2-\omega^2}\right)\left(\frac{1-(-1)^n}{\pi n}\right)\right)\sin(nx)=0$$

תשובה:

$$.u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{-\omega}{n}\sin(nt)+\sin(\omega t)\right)\left(\frac{2(1-(-1)^n)}{(n^2-\omega^2)\pi n}\right)\right)\sin(nx)$$

ב. נסמן ב $u(x,t,\omega)$ את הפתרון מסעיף א.:

$$u(x,t,\omega)=\tfrac{4}{\pi}\tfrac{1}{1-\omega^2}\left(-\omega\sin(t)+\sin(\omega t)\right)\sin(x)$$

$$+\textstyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\left(\frac{-\omega}{n}\sin(nt)+\sin(\omega t)\right)\left(\frac{2(1-(-1)^n)}{(n^2-\omega^2)\pi n}\right)\right)\sin(nx)$$

כעת נחשב $\lim_{\omega\to 1}u(x,t,\omega)$. הבעיה היא רק באיבר הראשון מכיוון שהמכנה מתאפס כאשר $\omega=1$. נחשב את הגבול של האיבר הראשון באמצעות כלל לופיטל:

$$.\lim_{\omega\to 1}\frac{-\omega\sin(t)+\sin(\omega t)}{1-\omega^2}=\frac{1}{2}\left(\sin t-t\cos t\right)$$

פתרון הבעיה (2) עם $\omega=1$:

$$u(x,t)=u(x,t,1)=\tfrac{4}{\pi}\left(\tfrac{\sin t}{2}-t\cos t\right)\sin(x)$$

$$+\textstyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\left(\frac{-1}{n}\sin(nt)+\sin(t)\right)\left(\frac{2(1-(-1)^n)}{(n^2-1)\pi n}\right)\right)\sin(nx)$$

הגורם $-t\cos t$ גורר שהפתרון אינו חסום עבור $\omega=1$, כלומר המיתר במצב של תהודה.

4 יהיו X_n פונקציות עצמיות של בעיית שטורם ליוביל:

$$,\begin{cases}-X''=\lambda X\\ X(0)=X(\pi)=0\end{cases}$$

$$.\lambda_n=n^2,\ \ X_n(x)=\sin(nx),\ \ n=1,2,3,...$$

נציב

$$,u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}T_nX_n$$

אז

$$.u_{tt}+2au_t-2u_{xx}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''+2aT_n'+2n^2T_n\right)X_n=\sin(\omega t)X_1$$

לפיכך

<u>$n=1$:</u>

$$T_1'' + 2aT_1' + 2T_1 = \sin(\omega t)$$

<u>$n \geq 2$:</u>

$$T_n'' + 2aT_n' + 2n^2 T_n = 0$$

פתרון המשוואות <u>$n \geq 2$:</u>

$$T_n(t) = e^{-at}\left(a_n \cos(\sqrt{2n^2 - a^2}t) + b_n \sin(\sqrt{2n^2 - a^2}t)\right)$$

<u>$n=1$:</u>

$$T_1(t) = e^{-at}\left(a_1 \cos(\sqrt{2 - a^2}t) + b_1 \sin(\sqrt{2 - a^2}t)\right) + T_p(t)$$

פתרון כללי של המשוואה:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-at}\left(a_n \cos(\sqrt{2n^2 - a^2}t) + b_n \sin(\sqrt{2n^2 - a^2}t)\right)\sin(nx) + T_p(t)\sin(x). \qquad \textbf{(4)}$$

נפתור בעת את $T_p(t)$:

$$T_p(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$

$$\begin{aligned} T_p''(t) + 2aT_p'(t) + 2T_p(t) &= \cos(\omega t)\left(-\omega^2 A + 2aB + 2A\right) + \sin(\omega t)\left(-\omega^2 B - 2aA + 2B\right) \\ &= \sin(\omega t). \end{aligned}$$

נקבל מערכת

$$\begin{pmatrix} 2-\omega^2 & 2a\omega \\ -2a\omega & 2-\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הדטטרמיננטה של המטריצה שווה ל $D = (2-\omega^2)^2 + 4a^2\omega^2$. כעת $D \neq 0$ כאשר $a \neq 0$, לכן למערכת יש פתרון ומ (4) נקבל שהוא חסום.

כאשר $a = 0$, אז $D = 0$ אם ורק אם $\omega = \sqrt{2}$. אז

$$T_p(t) = t\left(A\cos(\sqrt{2}t) + B\sin(\sqrt{2}t)\right)$$

וברור שבמקרה זה הפתרון אינו חסום. חישוב נותן

$$T_p(t) = t\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos(\sqrt{2}t)\right).$$

5 הפתרונות מוצגים בצורה $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$.

א. $v(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-3n^2t}\sin nx$, $w(x,t) = \frac{4x}{\pi}$.

ב.

$$v(x,t) = \frac{1}{4}\left(7e^{-4t}-1\right)\sin x + \frac{8}{\pi}\sum_{\substack{n=2\\ n\neq 3}}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} e^{-4n^2t}\sin nx + \left(\frac{2}{3}+1\right)e^{-4\cdot 3t}\sin 3x,$$

$$w(x,t) = 1.$$

ג.

$$v(x,t) = \left((1-\frac{1}{\pi})e^{-t} + \frac{1}{\pi}\right)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3\pi}\left(-e^{-n^2t}+1\right)\sin nx,$$

$$w(x,t) = t + \frac{x}{\pi}(t^2-t).$$