אוסף תרגילים במשוואות דיפרנציאליות חלקיות

201006

לביא קרפ

מכללת אורט בראודה, המחלקה למתמטיקה

משוואת לפלס, גרעין פואסון ופונקציות הרמוניות

תרגילים

1. לפלסיאן בקואורדינטות קוטביות: נציב $U(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$. הראה

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\theta\theta}.$$

2. א. הראה $u = A\ln r + B$ הרמונית ב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, כאשר $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

ב. $u = \frac{A}{r} + B$ הרמונית ב $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, כאשר $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

ג. נתונות הנקודות $\{P_1, ..., P_N\} \subset \mathbb{R}^3$, $P_i = (x_i, y_i, z_i)$. הראה ש

$$u(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}$$

פונקציה הרמונית ב $\mathbb{R}^3 \setminus \{P_1, ..., P_N\}$, כאשר m_i קבועים. מה המשמעות הפיסקלית?

3. פתור את בעיית דירכלה בעיגול:

א.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{x^2+y^2<1\} \\ u(x,y) = y^2, & \text{on } \{x^2+y^2=1\} \end{cases}.$$

ב.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{x^2+y^2<4\} \\ u(x,y) = x^2y^2, & \text{on } \{x^2+y^2=4\} \end{cases}.$$

4. א. פתור את בעיית דירכלה $u_{xx}+u_{yy}=1$ **בעגול** $r<a$ ו $u=0$ על השפה.
רמז: פתור בעיית דירכלה עבור $v(x,y)=u(x,y)-\frac{1}{4}(x^2+y^2)$.
ב. פתור את בעיית דירכלה $u_{xx}+u_{yy}=1$ **בטבעת** $a<r<b$ ו $u=0$ על השפה.

5.

6. פתור את בעיית דירכלה בחצי עיגול:

א.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{x^2+y^2<1, y>0\} \\ u(x,y) = y^3, & \text{on } \{x^2+y^2=1, y>0\} \\ u(x,0)=0, & \text{on } \{|x|\le 1, y=0\} \end{cases}.$$

רמז: $\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin(3\theta)$.

ב.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{x^2+y^2<16, y>0\} \\ u(x,y) = x^2y, & \text{on } \{x^2+y^2=16, y>0\} \\ u(x,0)=0, & \text{on } \{|x|\le 16, y=0\} \end{cases}.$$

7. פתור את בעיית נוימן בעיגול

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{x^2+y^2<1\} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \cos\theta + \sin(2\theta) + \cos(3\theta), & \text{on } \{x^2+y^2=1\} \end{cases},$$

כאשר η הנורמל בכיוון החיצוני.

8. יהי u פתרון של בעיית דירכלה (1).

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{x^2+y^2<1\} \\ u(1,\theta) = |\cos(2\theta)|, & \text{on } \{x^2+y^2=1\} \end{cases}. \qquad (1)$$

א. חשב $u(0,0)$.
ב. חשב $\max_{\{x^2+y^2\le 1\}} u(x,y)$.
ג. הראה ש $(x^2-y^2)<u(x,y)$ ב $\{x^2+y^2<1\}$.

9. יהי u פתרון של בעיית דירכלה (2).

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{x^2+y^2<1\} \\ u(x,y) = x^2+y^4, & \text{on } \{x^2+y^2=1\} \end{cases}. \qquad (2)$$

א. חשב $u(0,0)$.

ב. חשב $\max_{\{x^2+y^2\le 1\}} u(x,y)$.

ג. האם קיימת נקודה (x_0,y_0) כך ש $x_0^2+y_0^2<1$ ו $u(x_0,y_0)=\frac{3}{4}$?

10. פתור בעיית דירכלה בתחום החיצוני של עיגול.

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } \{x^2+y^2>1\} \\ u(1,\theta) = 1+2\sin\theta - 5\sin 2\theta, & \text{on } \{x^2+y^2=1\} \\ u \text{ חסומה בסביבת } \infty \end{cases}.$$

11. מצא טמפרטורה במצב יציב בטבעת $\{1<x^2+y^2<4\}$.

א. בשפה הפנימית הטמפרטורה היא $\cos^2\theta$ ובחיצונית 1.

ב. בשפה הפנימית הטמפרטורה היא $\cos^2\theta$ ובחיצונית מבודדת.

12. תהי $f(u,v)$ הרמונית ב $\Omega\subset\mathbb{R}^2$. נעשה את שינוי המשתנים

$$u = U(x,y), \qquad v = V(x,y),$$

כאשר הפונקציות U ו V מקיימות את משוואת Cauchy–Riemann ומקיימות

$$\begin{cases} U_x = V_y \\ U_y = -V_x \end{cases}$$

בתחום D. נניח כי $U,V\in C^2(D)$ ו (U,V) מעתיקה את התחום D על Ω. הראה שהפונקציה $g(x,y)=f(U(x,y),V(x,y))$ הרמונית ב D. בטא את התוצאה במונחים של העתקות קונפורמיות.

13. תהי u הרמונית בכל $\mathbb{R}^2$.

א. הראה שאם $T(x,y)=(x-a,y-b)$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$, אז $v(x,y)=(u\circ T)(x,y)$ הרמונית בכל $\mathbb{R}^2$.

ב. הראה שאם $T(x,y)=(\cos\theta x-\sin\theta y,\sin\theta x+\cos\theta y)$, כאשר $\theta\in\mathbb{R}$, אז $v(x,y)=(u\circ T)(x,y)$ הרמונית בכל $\mathbb{R}^2$.

ג. מה המשמעות הגאומטרית של סעיפים א. ו–ב.

גרעין פואסון

הפונקציה

$$P(r,\theta,\varphi) := \frac{1}{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}$$

נקראת גרעין פואסון. ובקואורדינטות קארטזיות: $\mathbf{x}=(x_1,x_2),\ \ \xi=(\xi_1,\xi_2)$,

$$P(\mathbf{x},\xi):=\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}-\xi|^2}.$$

פתרון בעיית דירכלה

$$\begin{cases}\Delta u=0, & \text{in } B_R(0)\\ u=f, & \text{on } \partial B_R(0)\end{cases}, \tag{3}$$

ניתן על ידי

$$u(r,\theta)=\int_0^{2\pi}P(r,\theta,\varphi)f(\varphi)d\varphi, \tag{4}$$

ובקואורדינטות קארטזיות

$$u(\mathbf{x})=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\{|\xi|=R\}}\frac{R^2-|\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x}-\xi|^2}f(\xi)ds_\xi.$$

14. א. הראה את תכונת הממוצע של פונקציות הרמוניות: אם u הרמונית ב $B_R(0)$ ורציפה למקוטעין על העיגול הסגור $\overline{B_R(0)}$, אז

$$u(0,0)=\frac{1}{2\pi R}\int\limits_{\{|\mathbf{x}|=R\}}uds.$$

ב. יהי u פתרון של בעיית דירכלה **(3)**. השתמש בנוסחאת פואסון לחשב את u_{x_1} ו u_{x_2}, עבור $|\mathbf{x}|<R$.

ג. הסק מסעיף א' ש $u\in C^\infty(B_R)$, אפילו אם f רק רציפה למקוטעין על שפת העיגול B_R.

ד. יהי Ω תחום פתוח ותהי u פונקציה הרמונית ורציפה ב Ω. הראה כי $u\in C^\infty(\Omega)$.
רמז: ניקח נקודה $(x_0,y_0)\in\Omega$, אז קיים $R>0$ כך ש $B_R(x_0,y_0)=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2\}\subset\Omega$. בחר קואורדינטות קוטביות ביחס לנקודה (x_0,y_0), אז

$$u(r,\theta)=\int_0^{2\pi}P(r,\theta,\varphi)u(R\cos\varphi,R\sin\varphi)d\varphi.$$

כעת השתמש בסעיף ב'.

15. א. הראה את אי שיוויון הרנאק $(\mathrm{Harnack})$: אם u הרמונית וגם אי-שלילית ב-B_R, אז

$$\frac{R-\rho}{R+\rho}u(0,0)\le u(\rho,\theta)\le\frac{R+\rho}{R-\rho}u(0,0). \tag{5}$$

רמז: השתמש ב–(2) עם $f(\varphi) = u(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$ ושם לב ש–

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)d\varphi$$

זה הממוצע של u על המעגל ∂B_R. ובנוסף השתמש בעובדה ש־ $-1 \leq \cos(t) \leq 1$.

ב. תהי $u(x,y)$ הרמונית בכל $\mathbb{R}^2$ וגם אי–שלילית. בהסתמך על סעיף א, הראה ש- $u(x,y) \equiv C$, כאשר C זה קבוע.
רמז: השאף את R לאינסוף ב-(3).

ג. הראה את משפט ליוביל (Liouville): אם $u(x,y)$ הרמונית בכל $\mathbb{R}^2$ וחסומה, אז $u(x,y) \equiv C$, כאשר C זה קבוע.
רמז: u חסומה, גורר ש $v = u + M$ אי־שלילית עבור M מספיק גדול וגם הרמונית.

16. נתונה הפונקציה

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 - 2x + 1 + y^2}.$$

א. הראה ש u הרמונית בעגול היחידה $B = \{x^2 + y^2 < 1\}$.

ב. האם יש סתירה לעקרון המקסימום? נמק!

פונקציות הרמוניות ותת-הרמוניות

- $B_r(x_0,y_0) = \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}$ כדור ברדיוס r.
- $C_r(x_0,y_0) = \partial B_r(x_0,y_0) = \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\}$ מעגל ברדיוס r.
- ממוצע מעגלי $m(r,x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi r}\int_{C_r(x_0,y_0)} u ds$.
- ממוצע כדורי $M(r,x_0,y_0) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{B_r(x_0,y_0)} u dxdy$.
- פונקציה u הרמונית בתחום Ω, אם $\Delta u = 0$ ב Ω.
- פונקציה u תת-הרמונית בתחום Ω, אם $\Delta u \geq 0$ ב Ω.
- פונקציה u על-הרמונית בתחום Ω, אם $\Delta u \leq 0$ ב Ω.

17. א. הראה שלכל $r > 0$,

$$\frac{dm}{dr} = \frac{1}{2\pi r}\iint_{B_r(x_0,y_0)} \Delta u dxdy.$$

ב. הסק מסעיף א. שאם u תת-הרמונית ב $B_R(x_0,y_0)$, אז u מקיימת תכונת תת-ממוצע

$$u(x_0,y_0) \le \frac{1}{2\pi r}\int_{C_r(x_0,y_0)} uds$$

לכל $r \le R$.

ג. הסק מסעיף ב. שאם u תת-הרמונית ב $B_R(x_0,y_0)$, אז u מקיימת תכונת תת-ממוצע

$$u(x_0,y_0) \le \frac{1}{\pi r^2}\iint_{B_r(x_0,y_0)} udxdy$$

לכל $r \le R$.

ד. הסק מהסעיפים הקודמים. שאם u הרמונית ב $B_R(x_0,y_0)$, אז u מקיימת תכונת ממוצע

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{B_r(x_0,y_0)} udxdy$$

לכל $r \le R$.

מסקנה: אם u הרמונית (תת-הרמונית) בתחום $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, אז לכל כדור $B_R(x_0,y_0)$ כך ש $B_R(x_0,y_0) \subset \Omega$, u מקיימת את תכונת הממוצע (תת-ממוצע) בכדור $B_R(x_0,y_0)$.

תשובות

2 ג. אם בנקודות $\{P_1, ..., P_n\}$ יש מטען $\{-m_1, ..., -m_N\}$ בהתאמה, אז הכוח שפועל על חלקיק בנקודה (x, y, z) ניתן על ידיד $\nabla u(x, y, z)$.

3 א. $u(r,\theta) = \frac{1}{2}\left(1 - r^2\cos(2\theta)\right)$, ב. $u(r,\theta) = 2 - \frac{r^4}{8}\cos(4\theta)$

6 א. $u(r,\theta) = \frac{1}{4}\left(3r\sin\theta - r^3\sin(3\theta)\right)$, ב. $u(r,\theta) = 4r\sin\theta + \frac{1}{4}r^3\sin(3\theta)$

7 $u(r,\theta) = r\cos\theta + \frac{r^2}{2}\sin(2\theta) + \frac{r^3}{3}\cos(3\theta)$

8 א. $u(0,0) = \frac{2}{\pi}$; ב. 1.

9 א. $u(0,0) = \frac{7}{8}$; ב. 1.

10 $u(x,y) = 1 + \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{10xy}{(x^2+y^2)^2}$.

11 א. $U(\theta,\rho) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\ln 2}\ln\rho - \frac{2}{15}\left(\frac{\rho^2}{4} - \frac{4}{\rho^2}\right)\cos 2\theta$.

ב. $U(\theta,\rho) = \frac{1}{2} + \frac{1}{34}\left(\rho^2 + 16\rho^{-2}\right)\cos 2\theta$.

12 העתקות קונפורמיות משמרות הרמוניות.

13 איזומטריות ב $\mathbb{R}^2$ משמרות הרמוניות.