אוסף תרגילים במשוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

לביא קרפ
מכללת אורט בראודה

המחלקה למתמטיקה

משוואת הגל - מיתר אינסופי

מיתר אינסופי

1. פתור את בעיית התחלה

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & \text{IN } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ \left.\begin{array}{c} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{array}\right\}, & \text{IN } \mathbb{R} \end{array}\right. ,$$

כאשר

א. $f(x)=\cos(3x)$, $g(x)=x$, $c=7$.

ב. $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin(2x)$, $c=4$.

2. מיתר משוך: יהי u פתרון של בעיית התחלה

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt}-u_{xx}=0, & \text{IN } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ \left.\begin{array}{c} u(x,0)=\left\{\begin{array}{ll} 1-|x|, & |x|\le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{array}\right. \\ u_t(x,0)=0 \end{array}\right\}, & \text{IN } \mathbb{R} \end{array}\right.$$

שרטט את הפתרונות בזמנים $t=0$, $t=\frac{1}{2}$, $t=1$ ו $t=2$.

3. נתונה המשוואה

$$u_{xx}+u_{xy}-2u_{yy}=0. \qquad (1)$$

א. מצא פתרון כללי של (1).

ב. מצא נוסחה לפתרון של (1) עם תנאיי ההתחלה $u(x,0)=f(x)$ ו $u_y(x,0)=g(x)$.

4. יהי $u(x,t)$ פתרון משוואת הגל $u_{xx}-u_{tt}=0$. הראה את הזהות

$$u(x_0+h,t_0+k)+u(x_0-h,t_0-k)=u(x_0+k,t_0+h)+u(x_0-k,t_0-h),$$

לכל $h>0$ ו $k>0$.
רמז: שרטט את המקבילית אשר קודקודיה הם $(x_0\pm h,t_0\pm k)$ ו $(x_0\pm k,t_0\pm h)$.

5. מכת הפטיש: יהי u פתרון של בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & \text{IN } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ \left.\begin{array}{l} u(x,0)=0 \\ u_t(x,0)=H(x)\begin{cases} 1, & |x|\le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \end{array}\right\}, & \text{IN } \mathbb{R} \end{cases}$$

א. חשב $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ לכל x.
ב. שרטט את הפתרונות בזמנים $t=0$, $t=\frac{1}{2}$, $t=1$ ו $t=2$.

6. יהי u פתרון של בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0, & \text{IN } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ \left.\begin{array}{l} u(x,0)=\begin{cases} 1, & 1\le x\le 2 \\ -1, & -2\le x\le -1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \end{array}\right\}, & \text{IN } \mathbb{R} \end{cases}$$

שרטט את הפתרונות בזמנים $t=0$, $t=\frac{1}{2}$, $t=1$, $t=\frac{3}{2}$ ו $t=2$.

7. בעקבות פיצוץ נוצר גל הדף המקיים את המשוואה

$$P_{tt}-P_{xx}=0,$$

כאשר $P(x,t)$ זה הלחץ בנקודה x ובזמן t. תנאי ההתחלה שנוצרו בפיצוץ הם

$$P_t(x,0)=\begin{cases} 1, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases} \quad \text{ו} \quad P(x,0)=\begin{cases} 10, & |x|\le 1 \\ 0, & |x|>1 \end{cases}.$$

בנקודה $x_0=10$ נמצא מבנה. המהנדס שתכנן את המבנה קבע שהוא יחזיק מעמד בלחצים המקיימים $P<6$. האם המבנה יתמוטט?

8. הי $u(x,t)$ פתרון המשוואה

$$\begin{cases} u_{tt}-4u_{xx}=0, & \text{IN } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ \left.\begin{array}{l} u(x,0)=\begin{cases} 2, & -1\le x\le 3 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \\ u_t(x,0)=0 \end{array}\right\}, & \text{IN } \mathbb{R} \end{cases}$$

מצא את הערכים t_k בהן $u(0,t_k)$ אינה רציפה.

9. היי $u(x,t)$ פתרון המשוואה

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} - 4u_{xx} = 0 & \text{IN } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ \left.\begin{array}{l} u(x,0) = \begin{cases} 4x - x^2, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \\ u_t(x,0) = \begin{cases} 8, & 0 \le x \le 4 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \end{array}\right\}, & \text{IN } \mathbb{R} \end{array}\right. .$$

א. חשב $\lim_{x\to\infty} u(x,10)$. ב. חשב $\lim_{t\to\infty} u(10,t)$.

10. יהי u פתרון של משוואת הגל $u_{tt} - 4u_{xx} = 0$ בכל המישור ושמקיים: u_x שווה לקבוע לאורך הישר $x - 2t = 1$, $u(x,0) = x^2$ ו $u(2,1) = -4$. קבע את $u(x,t)$.

משוואת הגל לא הומוגניות

11. בתרגיל הזה נראה שפתרון בעיית ההתחלה הלא הומוגניות

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt} - c^2u_{xx} = P(x,t), & \text{IN } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ \left.\begin{array}{l} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{array}\right\}, & \text{IN } \mathbb{R} \end{array}\right. , \tag{2}$$

ניתן על ידי

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds + \frac{1}{2c}\iint_{\Delta} P(y,\tau)dyd\tau \ , \tag{3}$$

כאשר Δ המשולש האופייני עם הקדקודים (x,t), $(x-ct,0)$ ו- $(x+ct,0)$.

א. הראה כי פתרון של בעיית ההתחלה (2) עם $f \equiv g \equiv 0$ נתון על ידי ניתן על ידי האינטגרל הכפול

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\iint_{\Delta} P(y,\tau)dyd\tau.$$

רמז: השתמש במשפט גרין עם $Q(y,\tau) = c^2u_x(y,\tau)$ ו- $P(y,\tau) = u_t(y,\tau)$, אז

$$\oint_{\partial(\Delta)} u_tdy + c^2u_xd\tau = \iint_{\Delta}\left(c^2u_{xx} - u_{tt}\right)dyd\tau = -\iint_{\Delta} p(y,\tau)dyd\tau.$$

חשב כעת את האינטגרל הקווי ושם לב שעל הקווים $y - c\tau = x - ct$ ו $y + c\tau = x + ct$ מתקיים $dy = \pm cd\tau$ בהתאמה. נסה תחילה את ההוכחה עם $c = 1$.

ב. כתוב את הפתרון של (2) בצורה $u = v + w$ שתאפשר הוכחת (3) באמצעות נוסחת דלאמבר וסעיף א.

12. פתור את בעיית התחלה (2) כאשר

א. $f(x) = x$, $g(x) = e^{-x}$, $P(x,t) = xt$, $c = 4$.

ב. $f(x) = 0$, $g(x) = x$, $P(x,t) = e^{x+t}$, $c = 1$.

13. א. יהי u פתרון של בעיית ההתחלה (2) עם $f = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$, $g \equiv 0$, $P(x,t) = t$ ו $c = 1$. חשב $u(3,1)$ ו $u(3,3)$.

ב. יהי u פתרון של בעיית ההתחלה (2) עם $f = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$, $g \equiv 0$, $P(x,t) = \begin{cases} t, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$ ו $c = 1$. חשב $u(3,1)$ ו $u(3,3)$.

14. נתונה בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = \sin(x - \omega t), & \text{IN } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & \text{IN } \mathbb{R} \end{cases},$$

כאשר ω ו c קבועים חיוביים.

א. פתור את המשוואה כאשר $c \neq \omega$.

ב. פתור את המשוואה כאשר $c = \omega$.

ג. מהו ההבדל המשמעותי בין שני המצבים? המצב שבו $c = \omega$ נקרא תהודה.

15. יהי u פתרון של הבעיה (2). השתמש בנוסחה (3) להראות שעבור $0 \leq t \leq T$ מתקיים

$$|u(x,t)| \leq M_f + tM_g + \frac{t^2}{2} M_p, \qquad \textbf{(4)}$$

כאשר $M_f = \max_{s \in [x-cT, x+cT]} |f(s)|$, $M_g = \max_{s \in [x-cT, x+cT]} |g(s)|$, $M_p = \max_{(y,\tau) \in \Delta} |P(y,\tau)|$ ו Δ משולש עם הקדקודים $(x-cT, 0)$, $(x+cT, 0)$ ו (x, T).

16. א. יהי u פתרון של בעיית ההתחלה (2) עם $f = e^{-|x|}$, $g(x) = e^{-x^2}$ ו $P(x,t) = \sin(x+t)$. הראה שעבור $0 \leq t \leq 6$ ולכל x

$$|u(x,t)| \leq 25.$$

ב. יהי u פתרון של בעיית ההתחלה (2) עם $f = \sin(x^3)$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ ו $P \equiv 0$. הראה שעבור $0 \leq t \leq 10$ ולכל x

$$|u(x,t)| \leq 11.$$

17. בשאלה זו השתמש באי שוויון (4) על מנת להראות יחידות ויציבות של משוואת הגל.

א. יחידות: הראה שאם u_1 ו u_2 פתרונות של (2), אז $u_1 - u_2 \equiv 0$ עבור $t \geq 0$.

ב. יציבות: נניח כי u_1 מקיים את משוואת הגל (2) עם תנאי התחלה f_1, g_1 וצד ימין p_1 ו u_2 מקיים את משוואת הגל (2) עם תנאי התחלה f_2, g_2 וצד ימין p_2 ובנוסף

$$\left(\max|f_1-f_2|+\max|g_1-g_2|+\max_{x,t\geq 0}p_1(x,t)-p_2(x,t)|\right)<\epsilon,$$

אז עבור $0\leq T$ ולכל x

$$|u_1-u_2|\leq C(T,\epsilon), \tag{5}$$

כאשר C תלוי ב T ו ϵ בלבד.

מסקנה: המשמעות של (5) היא שאם תנאי התחלה וצד ימין קרובים אחד לשני, אז ניתן לשלוט על ההפרש של הפתרונות.

אנרגיה: האנרגיה הפוטנציאלית והקנטית הן

$$EK=\frac{c^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}u_x^2dx \qquad , EP=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}u_t^2$$

בהתאמה. והאנרגיה הטוטלית היא

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(u_t^2+c^2u_x^2\right)dx. \tag{6}$$

הערה: אם u פתרון של (2) כאשר $f(x)=g(x)=0$ עבור $|x|\geq M$ ו $P\equiv 0$, אז $u(x,t)=0$ עבור $|x|\geq M+ct$ ולכן אינטגרל האנרגיה (6) מתכנס.

18. הראה שאם u מקיימת את בעיית ההתחלה (6) ו $\lim_{x\to\pm\infty}u_t(x,t)u(x,t)=0$, אז האנרגיה נשמרת, כלומר $E(t)$ אינו תלוי ב t.
רמז: הראה ש

19. חשב את האנרגיה כאשר $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & |x|\leq 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$ ו u פתרון של (2) עם $c=1$ ו $P\equiv 0$.

20. נניח כי u מקיים את בעיית ההתחלה

$$\begin{cases}u_{tt}+au_t-c^2u_{xx}=0, & \text{IN } \mathbb{R}\times(0,\infty)\\ \left.\begin{array}{c}u(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=g(x)\end{array}\right\}, & \text{IN } \mathbb{R}\end{cases}$$

ושאינטגרל האנרגיה (6) מתכנס. הראה כי

$$\frac{d}{dt}E(t)=-a\int_{-\infty}^{\infty}u_t^2dx.$$

מסקנה: כאשר $a>0$ המיתר מרוסן והאנרגיה פונקציה יורדת, כאשר $a=0$ האנרגיה נשמרת ואילו עבור $a<0$ האנרגיה עולה.

מיתר חצי אינסופי

21. בתרגיל זה נדון במצב שבו המיתר תפוס בקצה אחד. ללא הגבלת הכלליות ניתן להניח כי המיתר תפוס בנקודה $x=0$ ו ש- $u(0,t)=0$.

הראה שפתרון המשוואה

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & 0<x<\infty,\ \ 0<t<\infty \\ u(x,0)=f(x), & 0\le x<\infty \\ u_t(x,0)=g(x), & 0\le x<\infty \\ u(0,t)=0, & 0\le t<\infty \end{array}\right. , \qquad (7)$$

ניתן על ידי

$$u(x,t)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds, & ct\le x \\ \\ \frac{-f(ct-x)+f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x}g_(s)ds, & ct>x \end{array}\right. . \qquad (8)$$

רמז: בצע הרחבה אי-זוגית של נעשה הרחבה אי$-$זוגית של f ו g:

$$g_{\text{odd}}(x)=\left\{\begin{array}{ll} g(x), & x\ge 0 \\ -g(-x) & x<0 \end{array}\right. \qquad , f_{\text{odd}}(x)=\left\{\begin{array}{ll} f(x), & x\ge 0 \\ -f(-x) & x<0 \end{array}\right.$$

והשתמש בנוסחת דאלמבר עם תנאי ההתחלה f_{odd} ו g_{odd}.

22. יהי $u(x,t)$ הפתרון של (7) כפי שנתון על ידי הנוסחה (8), מהו תחום התלות בנקודה (x,t)?

א. כאשר $ct\le x$.

ב. כאשר $ct>x$.

23. פתור את בעית ההתחלה והשפה (7) כאשר

א. $c=1$, $f(x)=x^2$ ו- $g(x)=\sin x$.

ב. $c=2$, $f(x)=1-e^{-x}$ ו- $g(x)=x^2$.

24. יהי u פתרון של (7) עם $f\equiv 0$, $g(x)=H(x-2)$ ו $c=1$, כאשר $H(x)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & |x|\le 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{array}\right.$.

הראה ש- $\lim_{t\to\infty}u(x_0,t)=0$ לכל $x_0>0$.

25. א. הראה ש $\mathrm{w}(x,t)=h(t-\frac{x}{c})$ פתרון של משוואת הגל $w_{tt}-c^2w_{xx}=0$, כאשר $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

ב. מצא נוסחה לפתרון של מיתר חצי אינסופי:

$$\left\{\begin{array}{ll} u_{tt}-c^2u_{xx}=0, & (x,t)\in(0,\infty)\times(0,\infty) \\ \left.\begin{array}{c} u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{array}\right\}, & x\in[0,\infty) \\ u(0,t)=h(t), & t\in[0,\infty) \end{array}\right. . \qquad (9)$$

ג. בהנחה שהפונקציות f, g ו h רציפות. מהו התנאי על f ו h על מנת שהפתרון יהי רציף?

26. מייתר נייח: מצא נוסחה לפתרון של הבעיה

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x < \infty \\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \le x < \infty \\ u_x(0,t) = 0, & 0 \le t < \infty \end{cases}.$$

רמז: בצע הרחבה זוגית של הפונקציות f ו g.

תשובות

1 א. $u = \cos 3x \cos 7t + xt$; ב. $u = x^2 + 16t^2 + \frac{1}{8}\sin 2x \sin 8t$.

3 א. $9u_{st} = 0$; ב. $u(x,y) = A(x+y) + B(2x-y)$, $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
ג. $u(x,y) = \frac{1}{3}\left(f(x+y) + 2f(x-y/2)\right) + \frac{2}{3}\int_{x-y/2}^{x+y} g(s)ds$.

7 $P(10,11) = 6$, הבניין מתמוטט.

8 $t = \frac{1}{2}$ ו $t = \frac{3}{2}$.

12 א. $u = x + \frac{1}{4}e^{-x}\sinh 4t + \frac{1}{6}xt^3$; ב. $u = xt + \frac{e^x}{2}\left(te^t - \sinh t\right)$

18 א. $u(3,1) = \frac{1}{6}$, $u(3,3) = \frac{3^3}{6} + \frac{1}{2}$; ב. $u(3,1) = 0$, $u(3,3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2}$

19 $E = \int_{-1}^{1}\left(2x^2+1\right)dx = \dfrac{32}{3}$.

22 א. $[x-ct, x+ct]$, ב. $[ct-x, ct+x]$.

23 א.

$$u(x,t) = \begin{cases} x^2 + t^2 + \sin x \sin t, & x - t \geq 0 \\ 2xt + \sin x \sin t, & x - t < 0 \end{cases}$$

ב.

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 - e^{-x}\cosh(2t) + \frac{1}{6}(6x^2t + 8t^3), & x - 2t \geq 0 \\ -e^{-2t}\sinh(x) + \frac{1}{6}(12xt^2 + x^3), & x - 2t < 0 \end{cases}$$

פתרונות מלאים

10 נראה שלא ניתן מהנתונים לחשב את הפתרון באופן מוחלט.

פתרון כללי של משוואת הגל הוא $u(x,t) = A(x-2t) + B(x+2t)$, כאשר $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
גזירה לפי x:

$$u_x(x,t) = A'(x-2t) + B'(x+2t).$$

לפי הנתון, על הישר $x - 2t = 1$ הנגזרת החלקית לפי x קבועה, משמעו

$$A'(x-2t) + B'(x+2t) = A'(1) + B'(x-2t+4t) = A'(1) + B'(4t+1) = C_0.$$

אז $B'(4t+1) = C_1$ ואחרי אינטגרציה $\frac{1}{4}B(4t+1) = C_1 t + C_2$. נציב $x = 4t+1$, אז $t = \frac{x-1}{4}$ ו $\frac{1}{4}B(x) = C_1 \frac{x-1}{4} + C_2$ או $B(x) = C_1 x + C_3$. נציב תנאי התחלה:

$$u(x,0) = A(x) + B(x) = A(x) + C_1 x = x^2 + C_4 \Rightarrow A(x) = x^2 - C_1 x + C_5.$$

ומכאן

$$u(x,t) = (x-2t)^2 - C_1(x-2t) + C_1(x+2t) + C_6 = (x-2t)^2 - C_1 4t + C_6.$$

אנו רואים שהפונקציה הזו מקיימת את שני התנאים הראשונים לכל ערך של הקבוע C_1.
ומכאן שהנתונים לא מספקים בכדי לקבוע את הפתרון באופן מוחלט.