אוסף תרגילים במשוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

לביא קרפ
מכללת אורט בראודה

המחלקה למתמטיקה

משוואת החום והדיפוסיה

הגדרות וסימונים:

- גרעין החום (גאוס):

$$S(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\kappa\pi t}}e^{\frac{-x^2}{4\kappa t}}. \quad \textbf{(1)}$$

- פתרון בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_t-\kappa u_{xx}=0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0)=f(x), & x\in\ \mathbb{R} \end{cases}, \quad \textbf{(2)}$$

כשאר f חסומה בישר $\mathbb{R}$, ניתן על ידי

$$u(x,t)=\left(S(\cdot,t)*f\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{4\kappa\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-(y-x)^2}{4\kappa t}}f(y)dy.$$

- Error–function:

$$\mathrm{Erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-z^2}dz, \qquad \mathrm{Erf}(\infty)=1.$$

בעיות התחלה

1. פתור את בעיית התחלה (2) כאשר $k=1$ ו

א. $f(x)=e^{3x}$; ב. $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & 0\le x \\ 0, & x<0 \end{cases}$.

2. יהי u פתרון של משוואת החום (2) עם $k=1$ ותנאי התחלה $f(x)=1$ בקטע $[a,b]$ ו $f(x)=0$ מחוץ לקטע $[a,b]$.

א. בטא את הפתרון באמצעות Error–function.

ב. מצא טור טיילור (מקלורין) של $\mathrm{Erf}(x)$.

ג. הסבר מדוע $u\in C^\infty$ עבור $t>0$.

ד. הראה $\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0$.

3. יהי $u(x,t)$ הפתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0)=\begin{cases} 1, & 0\le x \\ 0, & x<0 \end{cases}, & x\in\mathbb{R} \end{cases}.$$

א. הראה ש

$$u(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right).$$

ב. חשב $\lim_{t\to\infty}u(x,t)$.

ג. השווה את התוצאה עם שאלה 2, סעיף ד'. מהו הפירוש ההסתברותי?

הערה: ניתן לפרש את הפתרונות בתרגילים 3 ו 2 באמצעות תנועה בראונית. בתנועה בראונית לאורך ציר ה-x, חלקיק נע שמאלה או ימינה בהסתברות חצי. הפתרון של בעיית התחלה (2), $u(x,t)$, זה ההסתברות שחלקיק שבזמן 0 נמצא בנקודה x, יהי בקטע $[a,b]$ בזמן t.

4. פתור את משוואת הדיפוסיה עם גורם "פזרנות" (dissipation)

$$\begin{cases} u_t-ku_{xx}+bu=0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases},$$

כאשר $b>0$ קבוע. **רמז:** בצע שינוי משתנה $u(x,t)=e^{-bt}v(x,t)$.

5. פתור את משוואת החום עם זרימת גז (convection)

$$\begin{cases} u_t-ku_{xx}+Vu_x=0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases},$$

כאשר V קבוע. **רמז:** בצע שינוי משתנה $w(x,t)=e^{\alpha x+\beta t}u(x,t)$.

6. בתרגיל זה נראה שהקונבולוציה

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}f(y)dy \tag{3}$$

מקיים את תנאי ההתחלה

$$\lim_{t\to 0^+}u(x_0,t)=f(x_0)$$

לכל נקודת רציפות x_0 של f ובתנאי ש f חסומה על הישר הממשי.

א. הראה שלכל $0<t$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy=1.$$

ב. הראה שלכל $0<\delta$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int\limits_{\{|x-y|>\delta\}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}dy=0.$$

ג. הראה שאם $M\le|f(x)|$ לכל x ו f רציפה ב x_0 , אז

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x_0-y)^2}{4t}}f(y)dy=f(x_0).$$

7. תהי $f\in C^m(\mathbb{R})$ שמקיימת $|f^{(j)}(x)|\le M$, $j=0,1,\dots,m$. הראה שאם u פתרון של בעיית ההתחלה (2), אז

$$\left|\frac{\partial^j u}{\partial x^j}(x,t)\right|\le M.$$

8. בתרגיל זה נראה את עקרון Duhamel למשוואת החום הלא הומוגנית. לשם הפשטות ניקח $k=1$.

א. הראה שלכל $\tau>0$ שפתרון בעיית התחלה

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}=0, & (x,t)\in\mathbb{R}\times(\tau,\infty)\\ u(x,\tau)=f(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

ניתן על ידי

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}S(x-y,t-\tau)f(y)dy.$$

ב. הראה שפתרון בעיית התחלה

$$\begin{cases} w_t-w_{xx}=P(x,t), & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)\\ w(x,0)=0, & x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

ניתן על ידי $w(x,t)=\int_0^t\mathcal{W}(x,t,\tau)d\tau$, כאשר

$$\begin{cases} \mathcal{W}_t-\mathcal{W}_{xx}=0, & (x,t)\in\ \mathbb{R}\times(s,\infty)\\ \mathcal{W}(x,\tau,\tau)=P(x,\tau), & x\in\mathbb{R}\end{cases}.$$

ג. הסק מסעיפים א' ו ב' שהפתרון לבעיית ההתחלה הלא הומוגנית

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = P(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

ניתן על ידי

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(x-y,t) f(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} S(y-\tau, t-\tau) P(y,\tau) dy d\tau.$$

9. בתרגיל זה נביא את הדוגמה של Tychonoff שמראה שמשוואת החום על כל הישר אינה מוגדרת היטב. תהי

$$g(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}.$$

הראה ש

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}$$

מקיימת את משוואת החום עבור $t > 0$ ו $u(x,0) = 0$. איזה תכונה של המושג "מוגדרת היטב" אינה מתקיימת?

עקרון המקסימום

בשאלות הבאות נעסוק בעקרון המקסימום ומסקנותיו. אנו נשתמש בסימונים הבאים:

א. **רצועה סופית:** $R_T = \{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}$;

ב. **רצועה אינסופית:** $R_\infty = \{0 \le x \le l,\ 0 \le t < \infty\}$;

ג. **שפה פרבולית:**

$$\begin{aligned} \partial_p R_T &= \partial R_T \setminus \{0 \le x \le l,\ t = T\} \\ &= \{x = 0,\ 0 \le t \le T\} \cup \{0 \le x \le l,\ t = 0\} \cup \{x = l,\ 0 \le t \le T\} \end{aligned}$$

ד. **שפת הרצועה האינסופית:** $\partial_p R_\infty = \partial R_\infty$.

10. הראה את התכונות הבאות של בעיית שפה התחלה:

$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = P(x,t), & 0 < x < \pi,\ 0 < t < \infty \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = a(t),\ u(\pi,t) = b(t), & 0 \le t < \infty \end{cases} \qquad \textbf{(4)}$$

א. ***יחידות:*** **רמז:** הנח כי u_1 ו u_2 פתרונות של **(4)** וישם את עקרון המקסימום להפרש $w = u_1 - u_2$.

ב. **עקרון ההשוואה:** נניח כי $u_1, u_2 \in C^2(R_\infty \setminus \partial R_\infty) \cap C(R_\infty)$ מקיימות את המשוואה

$$u_t - k u_{xx} = P(x,t) \quad \text{ב} \quad R_\infty \setminus \partial R_\infty$$

וגם $u_1 \le u_2$ על ∂R_∞, אז $u_1 \le u_2$ ב R_∞.

רמז: ישם את עקרון המקסימום להפרש $w = u_2 - u_1$.

11. נניח כי $u \in C^2(R_\infty \setminus \partial R_\infty) \cap C(R_\infty)$ פתרון של

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < \pi,\ \ 0 < t < \infty \\ u(x,0) = \sqrt{\sin(x)}, & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = 0,\ \ u(\pi,t) = 0, & 0 \le t < \infty \end{cases}.$$

הראה ש $e^{-t}\sin x \le u(x,t) \le 1$ עבור $(x,t) \in R_\infty$.

12. מצא את המקסימום והמינימום של $1 - x^2 - 2kt$ במלבן R_T.

13. יהי $u(x,t)$ פתרון של בעיית התחלה שפה $u_t - u_{xx} = 0$ ב $\{0 \le x \le 1, t > 0\}$, ועם תנאי שפה $u(0,t) = u(1,t) = 0$, והתחלה $u(x,0) = x(1-x)$.

א. הראה ש $0 \le u(x,t) \le \frac{1}{4}$.

ב. הראה ש $u(1-x,t) = u(x,t)$.

אנרגיה

עבור פתרון u של משוואת החום $u_t - ku_{xx} = 0$ ברצועה $\{0 < x < l, 0 < t\}$, נגדיר את אינטגרל האנרגיה

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)dx.$$

14. הראה ש $E(t) \le E(0)$ בתנאי השפה הבאים:

א. תנאי דירכלה: $u(0,t) = u(l,t) = 0$.

ב. תנאי נוימן: $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$.

ג. תנאי רובין: $u_x(0,t) - a_0u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) + a_lu(l,t) = 0$, כאשר $a_0, a_l > 0$. מהו הפירוש הפיסיקלי של תנאים אלו?

תשובות

1 א. $u(x,t)=e^{3x+9t}$, ב. $u(x,t)=e^{-(t+x)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{Erf}\left(\frac{-x+2t}{\sqrt{4t}}\right)\right)$

2 א. $u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Erf}\left(\frac{b-x}{\sqrt{4t}}\right)-\mathrm{Erf}\left(\frac{a-x}{\sqrt{4t}}\right)\right)$

4
$$u(x,t)=\frac{e^{-bt}}{\sqrt{4k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-x)^2}{4kt}}f(y)dy$$

5 בטא את התשובה באופן דומה לשאלה 4

12 מקסימום 1, מינימום $1-l^2-2kT$