מכללת אורט בראודה - המחלקה למתמטיקה

משוואות דיפרנציאליות חלקיות 201006

לביא קרפ

משוואות מסדר ראשון

1. לכל אחת מהמשוואות הבאות קבע האם הם לינאריות, לא לינאריות, הומוגניות ומהו סדר המשוואה.

   א. $u_y - u_{xx} + 1 = 0$; ב. $u_t - u_{xx} + tu_x = 0$; ג. $u_t - u_{xxx} + uu_x = 0$;

   ד. $u_{tt} - u_{xx} + x^2 = 0$; ה. $u_x(1+u_x^2)^{-1/2} + u_y(1+u_y^2)^{-1/2} = 0$;

   ו. $u_y + e^y u_x = 0$; ז. $u_y - u_{xxxy} + \sqrt{1+u} = 0$.

2. הראה שההפרש של שני פתרונות של משוואה לינארית $\mathcal{L}u = g$ עם אותה פונקציה g הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית $\mathcal{L}u = 0$.

3. פתור את המשוואות הבאות:

   א. $u_x = \cos(2x) + 2y$; ב. $u_{xy} = \sin x$; ג. $u_{xy} + 4u_y = 0$;

   ד. $yu_x + xu_y = xyu$ (רמז: נסה $u(x,u) = f(x^2+y^2)$, כאשר f פונקציה גזירה של משתנה אחד.)

4. נתונות הפונקציות $u(x,y) = e^x \cos y$ ו $v(x,y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. הראה כי

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

5. א. הראה שפתרון כללי של המשוואה $u_t + cu_x = 0$ נתון על ידי $F(x-ct)$, כאשר $F : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$.

   ב. השתמש בסעיף א' על מנת לפתור את בעיית ההתחלה

$$u_t + 2u_x = 0, \qquad u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}.$$

   ג. השתמש בסעיף א' על מנת לפתור את בעיית ההתחלה

$$u_t - 4u_x = 0, \qquad u(x,0) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

   ושרטט את הפתרונות בזמנים $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ ו $t = \frac{3}{2}$.

6. נתונה המשוואה

$$3u_x - 2u_y = 0 \tag{1}$$

א. מצא משפחה של קווים ישרים עליהם הפתרון של (1) הוא קבוע. (קווים אופייניים)
ב. מצא פתרון כללי של המשוואה (1).
ג. מצא פתרון של המשוואה (1) שמקיים את תנאי ההתחלה $u(x,0) = \sin x$.

7. תהי $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ פונקציה כך ש $u, u_x \in C(\mathbb{R}^2)$. נציב

$$U(x) = \int_0^x u(x,y)dy.$$

הראה ש

$$\frac{dU}{dx}(x) = u(x,x) + \int_0^x u_x(x,y)dy.$$

8. התרגיל הזה דן בפתרון של בעיית התחלה לא הומוגנית

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}, \tag{2}$$

כאשר $g \in C^1(\mathbb{R}^1)$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ו $c > 0$.

א. הראה שאם $w(t) = u(x_0 + ct, t)$, אז

$$\frac{dw}{dt}(t) = f(x_0 + ct, t).$$

ב. הסק מסעיף א' ש

$$w(t) = g(x_0) + \int_0^t f(x_0 + cs, s)ds.$$

ג. הסק מסעיפים א' וב' שאם (x,t) נמצא על הישר $x - ct = x_0$, אז

$$u(x,t) = g(x-ct) + \int_0^t f\left(x - c(t-s), s\right) ds \tag{3}$$

פתרון של בעיית התחלה (2).

ד. השתמש בתרגיל 7 לאמת ש- u כפי שניתן ב (3) אמנם פתרון של בעיית התחלה (2).

9. משוואת העברה עם גורם דעיכה γ.

א. הראה שהפתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} u_t + cu_x = -\gamma u \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}, \tag{4}$$

כאשר $g \in C^1(\mathbb{R}^1)$ ו γ ו c קבועים חיוביים, ניתן על ידי

$$u(x,t) = g(x-ct)e^{-\gamma t},$$

כלומר, גל מתקדם דועך.
רמז: הצב $v = ue^{\gamma t}$ והראה ש v מקיימת את המשוואה

$$v_t + cv_x = 0.$$

ב. נניח כי בזמן $t = 0$ הצינור נקי עבור $x < 0$, והצינור מזוהם עם צפיפות β ועבור $x \geq 0$. כלומר u מקיים את בעיית ההתחלה (4) עם

$$g(x) = \begin{cases} \beta, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

הראה שהפתרון אינו רציף עבור על הישר $x - ct = 0$.

10. נתונה המשוואה

$$u_x + u_y = 1. \tag{5}$$

א. מצא פתרון כללי של (5).
ב. הראה שלמשוואה (5) עם תנאי ההתחלה $u(x,2x) = x$ יש פתרון יחיד.
ג. הראה שלמשוואה (5) עם תנאי ההתחלה $u(x,x) = x$ יש אינסוף פתרונות.
ד. הסבר מדוע בסעיף ב' יש יחידות ואילו בסעיף ג' אין יחידות.

11. נתונה המשוואה

$$3u_x - u_y = 0 \tag{6}$$

א. מצא פתרון כללי של (6).
ב. פותר את המשוואה (6) עם תנאי ההתחלה $u(0,y) = e^{-y^2}$.
ג. האם ניתן לפתור את המשוואה (6) עם תנאי ההתחלה $u(x,2x) = e^{14x}$.
ד. האם ניתן לפתור את המשוואה (6) עם תנאי ההתחלה $u(x,x^2) = e^x$?

12. נתונה המשוואה

$$u_x + 3yu_y = 0 \tag{7}$$

א. מצא משפחה של עקומים עלהם הפתרון של (7) הוא קבוע, כלומר מצא קווים אופיינים (Characteristcs).

ב. מצא פתרון כללי של (7).

ג. האם ניתן לפתור את המשוואה (7) עם תנאי ההתחלה $u(x,0) = e^x$?

ד. האם ניתן לפתור את המשוואה (7) עם תנאי ההתחלה $u(0,y) = e^y$?

13. נתונה המשוואה

$$(1+x^2)u_x + u_y = 0 \tag{8}$$

א. מצא משפחה של עקומים עלהם הפתרון של (8) הוא קבוע, כלומר מצא קווים אופיינים (Characteristcs).

ב. באיזה חלק של המישור $\mathbb{R}^2$ קיים הפתרון של המשוואה (8) עם תנאי ההתחלה $u(x,0) = g(x)$?

ג. האם ניתן לפתור את המשוואה (8) עם תנאי ההתחלה $u(0,y) = h(y)$ בכל המישור $\mathbb{R}^2$?

14. נתונה בעיית התחלה

$$\begin{cases} \sqrt{1-x^2}u_x + u_y = 0 \\ u(0,y) = y \end{cases}. \tag{9}$$

א. פתור את בעיית ההתחלה (9).

ב. באיזה תחום של המישור התפרון קיים?

15. נתונה בעיית התחלה

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = 0 \\ u(0,y) = \cos y^2 \end{cases}. \tag{10}$$

א. פתור את בעיית ההתחלה (10).

ב. באיזה תחום של המישור הפתרון קיים?

16. נתונה בעיית התחלה

$$\begin{cases} yu_x - xu_y = 0 \\ u(x,x) = g(x) \end{cases}. \tag{11}$$

א. מצא עקומים אופייניים של (11).

ב. איזה תנאי הפונקציה g צרכה לקיים על מנת שהפתרון יהי קיים בכל המישור?

17. נתונה המשוואה

$$u_x + xu_y = 0. \tag{12}$$

א. פתור את (12) עם תנאי התחלה $u(0,y) = e^{-y^2}$.

ב. האם קיים פתרון ל (12) עם תנאי התחלה $u(x,0) = f(x)$, כאשר f פונקציה אי–זוגית.

18. הראה שכל פתרון של המשוואה $xu_x + yu_y = 0$ אינו רציף בראשית.

19. נתונה המשוואה

$$-yu_x + xu_y = f(x,y).$$

א. הראה שהפתרון הכללי, בקואורדינטות קוטביות $(x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, ניתן על ידי

$$u(\rho,\theta) = F(\rho) + \int_0^\theta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\varphi,$$

כאשר $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

רמז: השתמש בעבודה שהקווים האופייניים הם מעגלים.

ב. הראה שאם

$$\int_0^{2\pi} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)d\varphi = 0,$$

אז הפתרון מוגדר לכל $(x,y) \neq (0,0)$.

פתור את המשוואות הבאות באמצעות שינוי קואורדינטות.

20. נתונה המשוואה

$$au_x + bu_y = -\gamma u, \quad \gamma > 0, a^2 + b^2 \neq 0.$$

א. מצא פתרון כללי.

ב. הראה ש $\lim_{s\to\infty} u(x_0 + as, y_0 + bs) = 0$.

21. מצא פתרון של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} u_x + u_y = xy \\ u(x,0) = x \end{cases}.$$

22. נתונה המשוואה

$$u_x + 2u_y + (2x - y)u = 2x^2 + 3xy - 2y^2.$$

א. מצא פתרון כללי.

ב. האם הפתרון רציף בכל המישור?

תשובות

1 ליניאריות: א. ב. ד. ו. הומוגניות: ב. ג. ה. ו.

3 א. $u(x,y)=\frac{\sin 2x}{2}+2yx+F(y)$; ב. $u(x,y)=-y\cos x+F(x)+G(y)$;
ג. $u(x,y)=e^{-4x}F(y)$; ד. $u(x,y)=Ce^{\frac{x^2+y^2}{4}}$.

5 ב. $u(x,t)=\dfrac{1}{1+(x-2t)^2}$; ג. $u(x,t)=g(x+4t)$.

6 א. $2x+3y=K$; ב. $u(x,y)=F(2x+3y)$; ג. $u(x,y)=\sin(\frac{2x+3y}{2})$;
ד. $u(x,\pi)=-\cos x$, $u(x,2\pi)=-\sin x$.

8 ב. $u(x,y)=g(x-\frac{a}{b}y)+\dfrac{y}{b}$;
ג. $u(x,y)=\dfrac{1}{a+b}e^{(x-\frac{a}{b}y)}\left(e^{\frac{a+b}{b}y}-1\right)$, $a+b\neq 0$,
$u(x,y)=\dfrac{y}{b}e^{(x-\frac{a}{b}y)}$, $a+b=0$.

9 ב. $u(x,y)=(x+2y)e^y$.

10 א. $u(x,y)=F(x-y)+x$; ב. $u(x,y)=x$;
ג. $u(x,y)=F(x-y)+x$, לכל F שמקיימת $F(0)=0$;
ד. עקום ההתחלה הוא גם עקום אופייני.

11 א. $u(x,y)=F(x+3y)$; ב. $u(x,y)=e^{-\frac{(x+3y)^2}{9}}$; ג. כן;
ד. לא, קווים אופייניים חותכים פעמיים את עקום ההתחלה.

12 א. $y=Ce^{3x}$; ב. $u(x,y)=F(e^{-3x}y)$; ג. לא;
ד. כן, $u(x,y)=e^{e^{-3x}y}$.

13 א. $y=\arctan x+C$; ב. $\arctan x-\frac{\pi}{2}<y<\arctan x+\frac{\pi}{2}$; ג. כן.

14 א. $u(x,y)=y-\arcsin x$; ב. $-1<x<1$.

15 א. $u(x,y)=\cos(y^2-x^2)$; ב. $x^2\leq y^2$ (בשאר הנקודות קווים אופייניים אינם חותכים עקום התחלה).

16 א. $x^2+y^2=C$; ב. $g(x)=g(-x)$.

17 א. $u(x,y)=e^{-(y-x^2)^2}$; ב. לא.

20 א. $u(x,y)=e^{\frac{-\gamma(ax+by)}{a^2+b^2}}f(bx-ay)$, כאשר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

21 $u(x,y)=\frac{1}{8}\left(\frac{(x+y)^3}{3}-(x+y)(x-y)\right)+(x-y)\left(1+\frac{(x-y)^2}{12}\right)$.

22 א. $u(x,y)=1-\frac{5}{2x-y}\left(1-e^{\frac{2x^2+3xy-2y^2}{5}}\right)+e^{\frac{2x^2+3xy-2y^2}{5}}f(2x-y)$, כאשר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.